Reflexion und Transmission an Potenzialschwelle, Tunneleffekt

Teilchen mit Energie $E < V_{max}$:

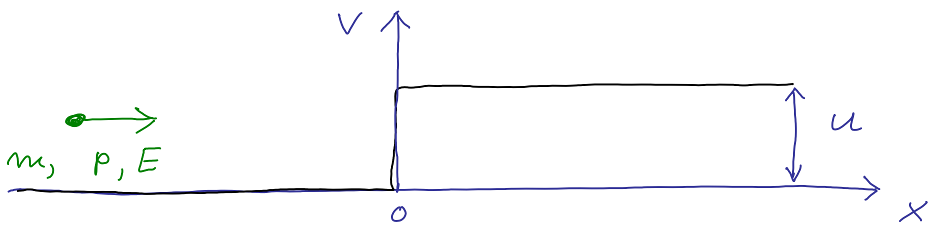
klassisch: Reflexion mit Wkt 1, keine Transmission

q.m.: Reflexion mit Wkt < 1,
Transmission mit Wkt. > 0 !

Tunneleffekt relevant etwa für α-Zerfall, Kernfusion, Feldemission (s. u.), ...

Reflexion u. Transmission an Potenzialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \; x < 0 \\ U & : \; x \geq 0 \end{cases}$$



Teilchen der Energie E aus $-\infty$ kommend treffe auf Potenzialstufe, was geschieht?

klassisch: $E < U$: Reflexion mit Wkt 1
$E > U$: Transmission mit Wkt. 1

q.m. Beschreibung mittels

<u>Streuansatz</u> für Energieeigenfunktion $\varphi_E(x) \equiv \psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \underline{\underline{r}}\, e^{-ikx} & : x \leq 0 \\ \underline{\underline{t}}\, \underline{\underline{e^{i\tilde{k}x}}} & : x > 0 \end{cases}$$

r : Reflexion Koeffizient $\longrightarrow$ <u>Reflexionswkt.</u> $R = |r|^2$

t : Transmission Koeffizient

zeitunabh. Schrödinger-Gl

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi$$

$$\Leftrightarrow \qquad \psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi$$

erfüllt (für $x \neq 0$) wenn

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,, \qquad \tilde{k} = \frac{1}{\hbar}\, 2m\sqrt{E - U}\,;$$

Koeffizienten r und t bestimmt durch <u>Stetigkeit</u> von (i) ψ und (ii) ψ' in $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &(i) \quad 1 + r = t \\ &(ii) \quad (1 - r)k = t\tilde{k} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &(1-r)k = (1+r)\tilde{k} \\ &\text{d.h.} \quad k - \tilde{k} = (k + \tilde{k})r \end{aligned}$$

also $$r = \frac{k - \tilde{k}}{k + \tilde{k}}$$

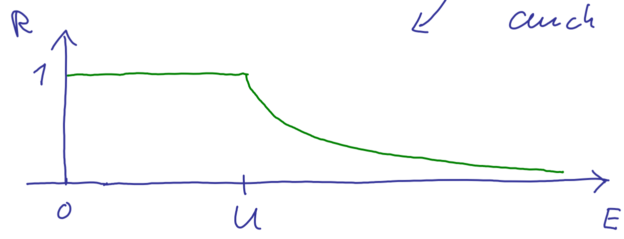
<u>Fallunterscheidung</u> :

1) <u>$E > U$</u> : $\rightarrow$ $\tilde{k} = \sqrt{2m(E-U)}/\hbar$ reell

und $$r = \frac{1 - \tilde{k}/k}{1 + \tilde{k}/k} = \frac{1 - \sqrt{\frac{E-U}{E}}}{1 + \sqrt{\frac{E-U}{E}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad R = r^2 \approx \begin{cases} 1 - 4\sqrt{\frac{E-U}{E}} & : \; 0 < E-U \ll E \\ \left(\frac{U}{4E}\right)^2 & : \; U \ll E \end{cases}$$

auch für $E > 0$: $R < 1$!



2) <u>$E < U$</u> :

$$\tilde{k} = i \underbrace{\sqrt{2m(U-E)}}_{\equiv q} / \hbar = iq$$

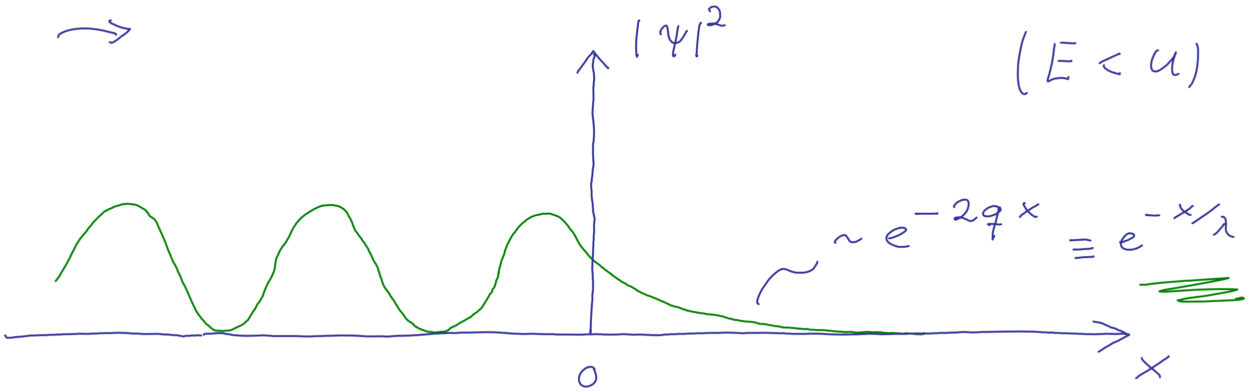
d.h. $r = \dfrac{1 - iq/k}{1 + iq/k} \rightarrow R = |r|^2 = 1$!

$$= e^{-i2\vartheta}, \quad \text{mit } \vartheta = \operatorname{atan} \frac{q}{k}$$

$$\rightarrow \quad \psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + e^{-i2\vartheta} e^{-ikx} & : \; x < 0 \\ t \; e^{-qx} & : \; x > 0 \end{cases}$$

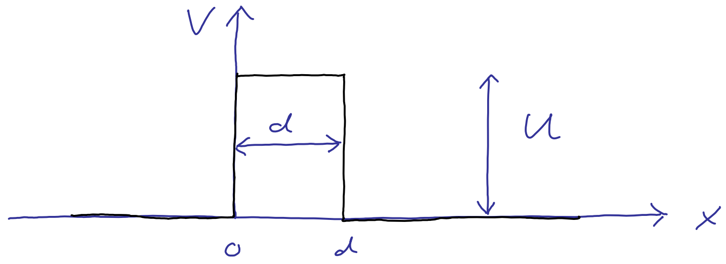
$$= 2 e^{-i\vartheta} \begin{cases} \cos(kx + \vartheta) & : \; x < 0 \\ \cos\vartheta \; e^{-qx} & : \; x > 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$



<u>Eindringlänge</u> $\lambda \equiv \dfrac{1}{2q} = \dfrac{\hbar}{\sqrt{8m(U-E)}}$

Reflexion und Transmission an Potenzialschwelle



Streuansatz

$(E < U)$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & : x < 0 \\ s e^{-qx} + u e^{+qx} & : 0 < x < d \\ t e^{ikx} & \end{cases}$$

Transmissionwkt $T = |t|^2 = 1 - |r|^2$

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

$$q = \sqrt{2m(U-E)}/\hbar$$

r, s, u, t bestimmt durch Stetigkeit von ψ und ψ'

bei $x = 0$ und $x = d$;

führt nach etwas Rechnen auf

$$T = \frac{2 \sin^2 \varphi}{\cosh(2qd) - \cos 2\varphi} \underset{qd \gg 1}{\approx} 4 \sin^2 \varphi \; e^{-2qd}$$

wir sind nur am exponentiellen Abfall e^{-2qd} intessiert

und schreiben daher:

$$\boxed{T = c_{E,U} \, e^{-\frac{\sqrt{8m(U-E)}}{\hbar} d}}$$