Quantenmechanik zusammengesetzter Systeme

AB

A : $\mathcal{H}_A$ mit ONB $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$

B : $\mathcal{H}_B$ mit ONB $|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle$

$\mathcal{H}_{AB} \overset{!}{=} \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit ONB

$$\{ |\varphi_i \chi_j\rangle \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

- $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$: „Tensorprodukt von $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$"
- $|\varphi_i \chi_j\rangle \equiv |\varphi_i\rangle|\chi_j\rangle \equiv |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \equiv \varphi_i \otimes \chi_j$
- das Tensorprodukt zweier Zustände (Vektoren)

$$|\psi_A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}_A$$

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^{m} \beta_j |\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_B$$

ist def. durch

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j |\varphi_i \chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

- Skalarprodukt zweier Zustände

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} |\varphi_i \chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$|\phi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} |\varphi_i \chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad :$$

$$\langle \psi_{AB} | \phi_{AB} \rangle = \sum_i \sum_j a_{ij}^* b_{ij} \qquad (\text{da } \{|\varphi_i \chi_j\rangle\} \ \underline{\text{ONB}})$$

- $\mathcal{H}_A^{\otimes n} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A^{\otimes n-1}$

$$= \underbrace{\mathcal{H}_A \otimes \cdots\cdots \otimes \mathcal{H}_A}_{n \text{ mal}}$$

- offenbar $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B$

$$\dim \mathcal{H}_A^{\otimes n} = (\dim \mathcal{H}_A)^n$$

<u>Quantenmechanische Verschränkung</u> (Schrödinger, 1935)

<u>Def</u>: a) Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ <u>separabel</u>

:<=> es gibt $|\psi_A\rangle$ und $|\psi_B\rangle$ derart,

dass $|\psi_{AB}\rangle \overset{!}{=} |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$

b) Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ <u>verschränkt</u>

:<=> $|\psi_{AB}\rangle$ <u>nicht</u> separabel.

ein verschränkter Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ zweier Systeme A und B in <u>großer Entfernung</u> ist der Hauptdarsteller im

<u>Einstein – Podolsky – Rosen – Paradoxon</u> (1935)

(in der Fassung von D. Bohm, 1951)

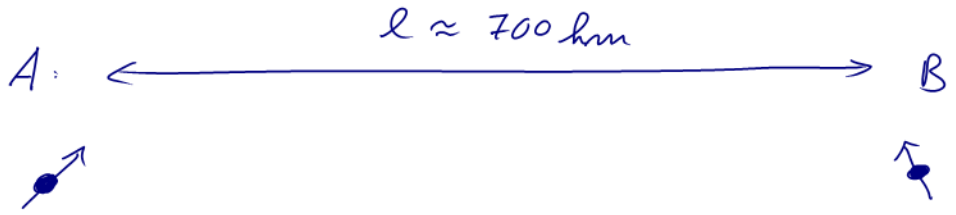
Anke in Aachen und Bernd in Berlin besitzen je ein Ag-Atom A bzw B im

$$\mathcal{H}_A \qquad\qquad \mathcal{H}_B$$

verschränkten Zustand

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+ \psi_-\rangle - |\psi_- \psi_+\rangle \right)$$

(übliche Notation)



betrachte folgende zwei Experimente :

(I) Anke misst zur Zeit $t=0$ die Größe μ_z ;

QM : Messergebnis unbestimmt :

$\mu_z = +\mu_0$ oder $\mu_z = -\mu_0$ mit

Wahrscheinlichkeit jeweils $1/2$!

Da gemäß QM physikalischer Zustand von AB vollständig durch $|\psi_{AB}\rangle$ beschrieben ist (P1), muss diese Unbestimmtheit des Messausgangs eine fundamentale Eigenschaft des Systems sein.

(II) Anke misst wieder zur Zeit $t=0$ die Größe μ_z , jetzt misst aber zudem Bernd kurz zuvor bei $t = -\Delta t$ mit $\Delta t < \ell/c$ ebenfalls die Größe μ_z (an seinem Atom B) :

QM: Bernd erhält mit Wkt $p_+ = 1/2$ das Ergebnis $\mu_z = -\mu_0$ und schließt, dass unmittelbar danach (also noch bevor Anke ihr Atom misst) AB im Zustand $|\psi'_{AB}\rangle = |\psi_+ \psi_-\rangle$;
d.h. Bernd weiß, das Anke $\mu_z = +\mu_0$ messen wird.

Falls Bernd $\mu_z = +\mu_0$ erhält, folgt $|\psi'_{AB}\rangle = -|\psi_- \psi_+\rangle$ und Anke wird $-\mu_0$ messen.

d.h.: bevor Anke Atom A misst, weiß Bernd bereits anhand seiner Messung an Atom B das Messergebnis von Anke!

Einstein, Podolsky und Rosen argumentieren:

Bernds Messung kann wegen $\Delta t < l/c$ nach SRT keinen Einfluss auf Ankes Atom zur Zeit $t = 0$ gehabt haben; d.h. Ankes Messergebnis muss auch ohne Bernds Messung schon festgestanden haben!

→ die in (I) beobachtete Unbestimmtheit ist also nicht fundamental wie von QM behauptet, sondern in der Unvollständigkeit der q.m. Beschreibung begründet!

→ Idee: Es gibt „verborgene Variablen" einer noch zu findenden „neuen Theorie", die den tatsächlichen Ausgang eines Experiments (etwa I) bestimmen!

(*)

quantitative und damit experimentell überprüfbare Folgerung aus Annahme (*):

Bellsche Ungleichungen (J. S. Bell, 1964)

Zur Ableitung einer dieser Ungleichungen betrachten wir folgende Situation unter Annahme (*):

Anke:
misst wahlweise Größen Q oder R mit mögl. Messwerten $q = \pm 1$ und $r = \pm 1$.

Bernd:
misst wahlweise Größen S oder T mit mögl. Messwerten $s = \pm 1$ und $t = \pm 1$.

Anke und Bernd führen sehr viele Messungen zufällig gewählter Größen Q/R bzw. S/T an einem jeweils gleich präparierten, gemeinsamen System AB aus (wie im EPR) $\longrightarrow$ Messreihen ermöglichen Bestimmung des Mittelwerts M der Größe

$$QS + RS + RT - QT$$

Nach Annahme (*) sind q, r, s und t durch Anfangswerte der verborgenen Variablen bestimmt; wir kennen diese nicht, können aber behaupten, dass sie einer (wenn auch unbekannten) Anfangsverteilung genügen; mittels der „wahren" Theorie folgt hieraus die Whk

$$p(q, r, s, t)$$

dafür, dass bei Messung von Q, R, S, T genau q, r, s und t

ermittelt werden. Allein durch die Existenz dieser Wkt. folgt

$$\boxed{M := \overline{QS} + \overline{RS} + \overline{RT} - \overline{QT} \leq 2} \qquad (1)$$

((Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969))

denn $M = \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q,r,s,t)\,(qs + rs + rt - qt)$

$$= \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q,r,s,t)\,\underbrace{\Big(\underbrace{(q+r)}_{\substack{2 \;\overset{!}{\longrightarrow}\; 0 \\ 0 \;\overset{!}{\longleftarrow}\; 2}} s + (r-q)\,t \Big)}_{\leq 2\;!} \qquad (**)$$

$$\leq 2 \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q,r,s,t) = 2 .$$

Ungleichung (1) gilt insbesondere für Atome A und B im Zustand wie oben,

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+ \psi_-\rangle - |\psi_- \psi_+\rangle \right),$$

und speziell gewählten Größen $(\mu_0 \equiv 1)$

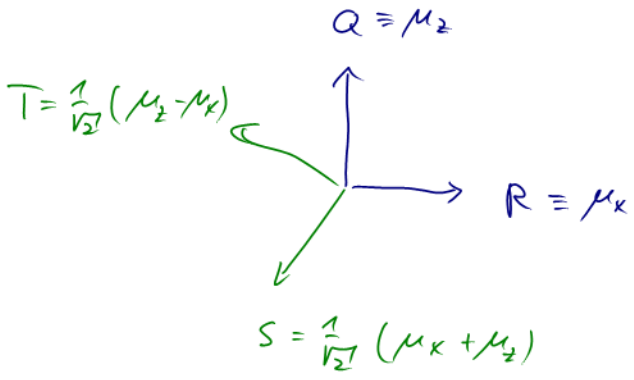
$$Q = \mu_z \qquad\qquad S = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_z + \mu_x)$$

$$R = \mu_x \qquad\qquad T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_z - \mu_x)$$

neben (1) können wir dann auch M direkt mittels QM ausrechnen:

$$M_{QM} \overset{!}{=} \underbrace{\langle QS\rangle_{\psi_{AB}}}_{= 1/\sqrt{2}} + \underbrace{\langle RS\rangle_{\psi_{AB}}}_{= 1/\sqrt{2}} + \underbrace{\langle RT\rangle_{\psi_{AB}}}_{= 1/\sqrt{2}} - \underbrace{\langle QT\rangle_{\psi_{AB}}}_{= -1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

etwas Rechnung! $\rightarrow$



Dass mit $M_{QM} = 2\sqrt{2} \gneq 2$ die CHSH-Ungleichung (1) verletzt wird ist <u>logisch</u> möglich, da die Voraussetzungen (*) für (1) <u>nicht</u> von den Postulaten der QM erfüllt werden

Was sagt das Experiment?

beginnend mit Aspect, Dalibard, Roger, 1982, heute <u>klare experimentelle Evidenz</u> für <u>Verletzung</u> der CHSH-Ungl. und zugleich <u>Bestätigung</u> der QM.

Bemerkung: im Beweis der CHSH-Ungl. wurde bei (**) die <u>Lokalität</u> (im Sinne der SRT) der verborg. Variablen vorausgesetzt!

<u>Fazit</u>: <u>jede</u> deterministische Theorie mit <u>lokalen verborgenen Variablen</u> steht im <u>Widerspruch</u> zum Experiment!