De Broglie – Bohm – Theorie

ca. 1927 → 1952

als Beispiel einer nicht-lokalen, dafür aber deterministischen Theorie

zuerst für ein Teilchen:

Zustand: 1) Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t)$ (komplex und normiert)

2) Ortskoordinaten $\vec{q}(t) = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$

Zustandsentwicklung: 1) $\psi(\vec{r},t)$ genügt Schrödingergl.:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec{r})\right)\psi}$$

(*) 2) $\vec{q}(t)$ „folgt" der Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t)$ gemäß

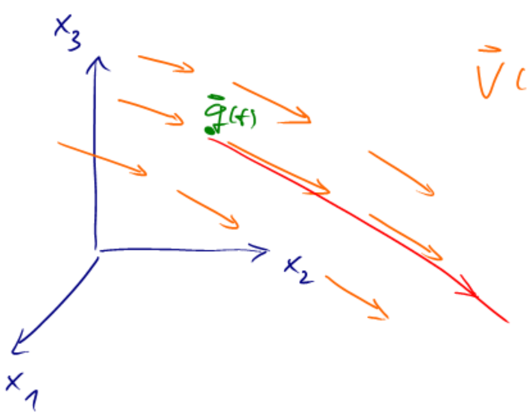
$$\boxed{\dot{\vec{q}}(t) = \frac{1}{\rho_\psi(\vec{q}(t),t)}\,\vec{j}_\psi(\vec{q}(t),t)}$$

wobei $\rho_\psi(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2$ (Whtsdichte)

$$\vec{j}_\psi(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\,\psi^*(\vec{r},t)\,\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t)$$

(Whtsstromdichte)

grobe Vorstellung:



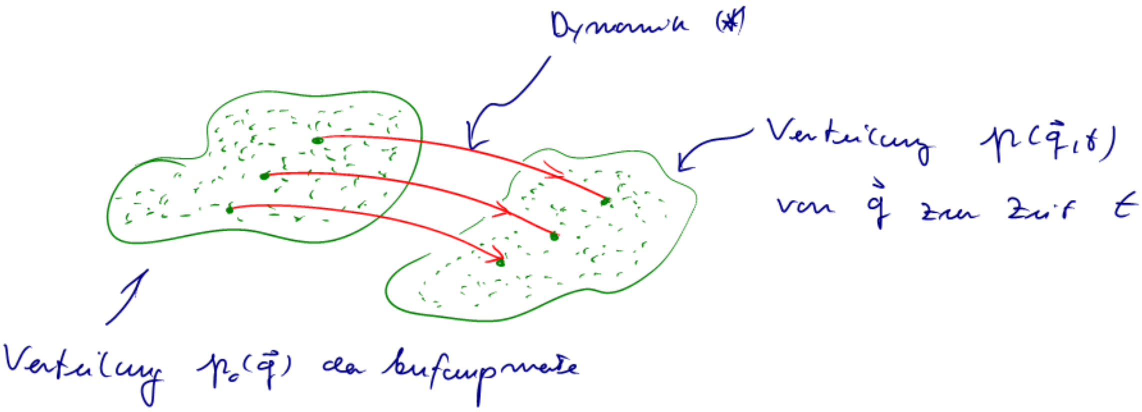
$$\vec{V}(\vec{r},t) \equiv \vec{j}(\vec{r},t)/\rho(\vec{r},t)$$

$$\boxed{\dot{\vec{q}}(t) \overset{!}{=} V(\vec{q}(t),t)}$$

<u>grundsätzliche Annahmen</u>: (i) Anfangsort $\vec{q}_0$ bei $t=0$ <u>nicht</u> genau bekannt, nur <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u> der Anfangswerte gegeben:

$$\rho_0(\vec{q})$$

(„$\vec{q}_0$ <u>verborgene</u> Variable")



(ii) <u>Anfangswellenfunktion</u> $\psi(\vec{r},0)$ genügt

$$\boxed{|\psi(\vec{r},0)|^2 \overset{!}{=} \rho_0(\vec{r})} \,,$$

unter dieser Nebenbedingung aber frei wählbar.

Dynamik (*) ist genau so konstruiert, dass dann für alle Zeiten $t>0$

$$\rho(\vec{q},t) \overset{!}{=} |\psi(\vec{q},t)|^2$$

$\rightarrow$ Wktsdichte $\rho(\vec{q},t)$ für Teilchenort $\vec{q}(t)$ entspricht <u>genau</u> der quantenmechanischen Aufenthaltswktsdichte, somit De Broglie-Bohm-Theorie <u>äquivalent</u> zur (nicht-relativistischen) Quantenmechanik eines Teilchens.

Verallgemeinerung für N Teilchen:

<u>Zustand</u>:

1) N-Teilchen-Wellenfkt $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$

2) $q(t) = (\vec{q}_1(t), \vec{q}_2(t), \dots, \vec{q}_N(t))$

<u>Zustandsentwicklung</u>:

1) $$i\hbar\,\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{N} p_l^2 + u(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\right)\psi$$

2) $$\dot{\vec{q}}_l(t) = \frac{1}{\rho(q_1(t), \dots, q_N(t))}\,\vec{j}_l(q_1(t), \dots, q_N(t))$$

$$= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\,\psi^* \vec{\nabla}_l \psi$$

etc.

allg. <u>Anmerkungen</u> zur De Broglie-Bohm-Theorie:

⊕ benötigt <u>kein</u> Messpostulat

– deterministisch

⊖ Wellenfkt ψ wirkt auf q, aber nicht umgekehrt

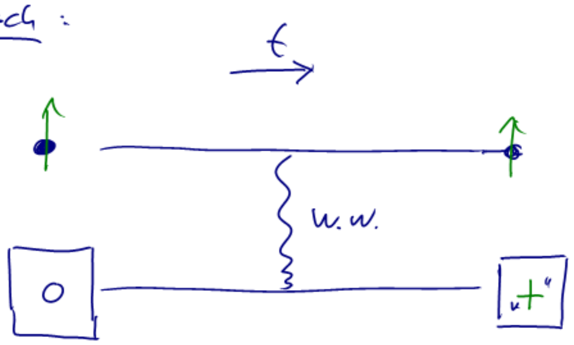
⊖ $\dot{q}_l(t)$ <u>instantan</u> durch $\vec{q}_1(t), \dots, \vec{q}_N(t)$ beeinflusst.

Quantenmechanische Beschreibung einer Messung

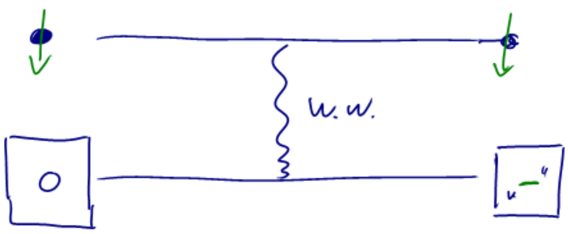
(sollte möglich sein, da Messung rein physikalischer Vorgang !)

z.B. Messung von μ_z an Ag-Atom,

Schematisch:



$\hat{=} \; |\psi_+\rangle|0\rangle \xrightarrow{U_t} |\psi_+\rangle|+\rangle$

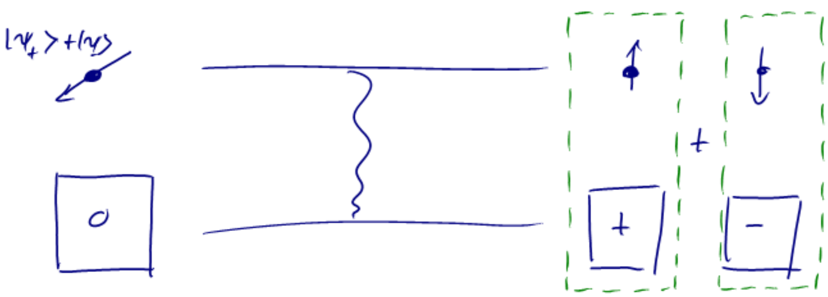


$\hat{=} \; |\psi_-\rangle|0\rangle \xrightarrow{U_t} |\psi_-\rangle|-\rangle$

Linearität der q.m. Zeitentwicklung U_t impliziert dann auch:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle \right)|0\rangle \xrightarrow{U_t} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle|+\rangle + |\psi_-\rangle|-\rangle \right)$$

$$\hat{=}$$



d.h. μ_z-Messung an $|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle$ führt auf Superposition makroskopischen Messgerätzustände „+" und „−"

?

beobachtet wird aber Messgerät im „+" oder „−",
im Übereinstimmung mit Messpostulat (P2) !

Lässt sich dieser Widerspruch auflösen?

zumindest partiell:

Übergang von quantenmechanischem zu klassischem Verhalten eines Systems aufgrund Wechselwirkung mit Umgebung:
Dekohärenz:

- H. D. Zeh ~ 1970
- Joos, Zeh 1986
- „Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory" by Joos, Zeh, Kiefer, Giulini, Kupsch, Stamatescu

Zur Illustration der q.m. Dekohärenz betrachten wir ein (evtl. makroskopisches) System S in Wechselwirkung mit Umgebung E; $\leadsto \mathcal{H}_S$ $\leadsto \mathcal{H}_E$

$|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ seien orthogonale Zustände von S;

$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_N\rangle$ sei ONB von $\mathcal{H}_E$;

Wir interessieren uns für folgende zwei grundsätzlich unterschiedliche Situationen ($\hat{=}$ verallgemeinerte Zustände):

I : System in <u>Superposition</u> $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\right)$

II : System im Zustand $|\psi\rangle = |\psi_+\rangle$ oder $|\psi\rangle = |\psi_-\rangle$, jeweils mit Wkt. $1/2$ ("<u>Gemisch</u>")

als Indikator für das Vorliegen von I bzw II betrachten wir Messung ob S im Zustand $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle\right)$:

I : Messung positiv mit Wkt. $p = |\langle\chi|\psi\rangle|^2 = 0$

II : Messung positiv mit Wkt.

$$p = \frac{1}{2}\underbrace{|\langle\chi|\psi_+\rangle|^2}_{=1/2} + \frac{1}{2}\underbrace{|\langle\chi|\psi_-\rangle|^2}_{=1/2} = 1/2$$

W.W. von S mit E führe zur folgenden Zeitentwicklung (analog Messung, s.o.):

$$|\psi_+\rangle|u_0\rangle \xmapsto{U_t} |\psi_+\rangle|u_+(t)\rangle$$
$$|\psi_-\rangle|u_0\rangle \longmapsto |\psi_-\rangle|u_-(t)\rangle$$

$$\rightarrow\ |\psi\rangle|u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\right)|u_0\rangle \xmapsto{U_t} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle|u_+(t)\rangle + |\psi_-\rangle|u_-(t)\rangle\right)}^{|\Psi_{SE}(t)\rangle}$$

System befinde sich zur Zeit $t_0 = 0$ in Superposition I, Umgebung im Zustand $|u_0\rangle$; <u>Wkt.</u>, dass zur Zeit $t>0$ System S im Zustand $|\chi\rangle$ und Umgebung E im Zustand $|\varphi_i\rangle$:

$$p_i \overset{!}{=} \left|\left(\langle\chi|\otimes\langle\varphi_i|\right)|\Psi_{SE}(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\Big|\overbrace{\langle\varphi_i|u_+(t)\rangle - \langle\varphi_i|u_-(t)\rangle}^{=\langle\varphi_i|u_+(t)-u_-(t)\rangle}\Big|^2$$

$$= \frac{1}{4} \langle \mu_+ - \mu_- | \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \, | \mu_+ - \mu_- \rangle$$

→ Whk, dass S im Zustand $|\chi\rangle$ und E im Zustand $|\varphi_1\rangle$ oder $|\varphi_2\rangle$ .... oder $|\varphi_N\rangle$:

$$P = \sum_i p_i = \frac{1}{4} \langle \mu_+ - \mu_- | \underbrace{\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{= \mathbb{1}_E} | \mu_+ - \mu_- \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \left(2 - 2 \,\mathrm{Re} \langle \mu_+ | \mu_- \rangle \right)$$

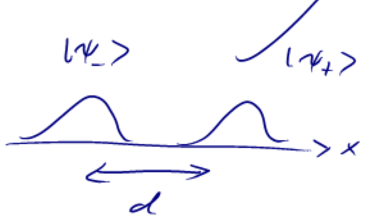
d.h.

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \mathrm{Re} \langle \mu_+(t) | \mu_-(t) \rangle \right)}$$

- $\langle \mu_+(t) | \mu_-(t) \rangle = 1$ → $P(t) = 0$: Situation I
  (Superposition ≙ q.m. Verhalten)

- $\langle \mu_+(t) | \mu_-(t) \rangle = 0$ → $P(t) = \frac{1}{2}$: Situation II
  (Gemisch ≙ klassisches Verhalten)

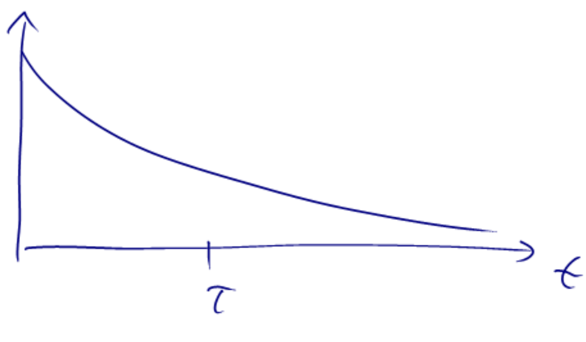
Beispiel: Dekohärenz eines Staubteilchens durch W.W. mit Gasteilchen:
(Joos, Zeh 1985)



- Luft (1 bar, 300 K)
- "Vakuum" (10^3 Teilchen/cm^3)

→ $\langle \mu_+(t) | \mu_-(t) \rangle \sim e^{-t/\tau}$

Dekohärenzzeit



d	τ_{Luft}/s	τ_{Vakuum}/s
1 cm	10^{-37}	10^{-23}
1 mm	10^{-35}	10^{-21}
⋮	⋮	⋮
1 Å	10^{-11}	10^{-7}

→ Die Superposition $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)$ ist aufgrund W.W. mit Umgebung extrem instabil und zerfällt innerhalb extrem kleiner Dekohärenzzeit τ in ein Gemisch aus $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ Zuständen;

dabei wesentlich: quantenmechanische Verschränkung von System und Umgebung:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)|u_0\rangle}_{\text{separabel}} \xrightarrow{t} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle|u_+\rangle + |\psi_-\rangle|u_-\rangle)}_{\text{verschränkt}}$$

(solange $|u_+\rangle \neq |u_-\rangle$)

kurz: quantenmechanische Verschränkung von System und Umgebung führt zu klassischem Verhalten (II, Gemisch) des Systems.

beachte: Gesamtsystem S+E bleibt in Superposition !

$$|\psi_{SE}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle|u_+(t)\rangle + |\psi_-\rangle|u_-(t)\rangle)$$