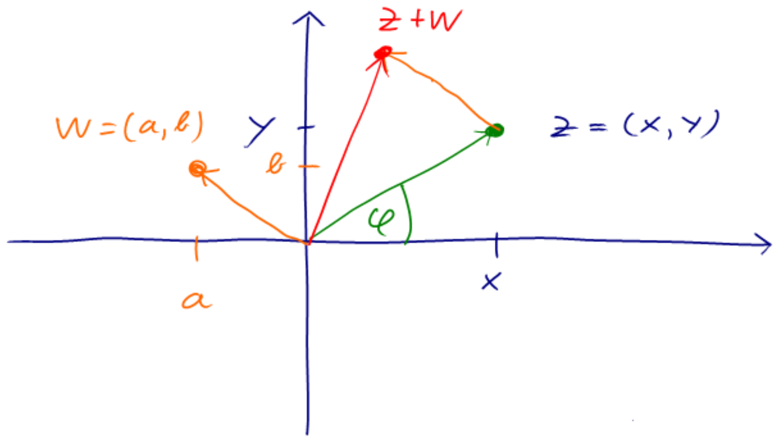
Komplexe Zahlen (Wiederholung)

geometrisch:

$$\underline{\text{komplexe Zahl}}\ z \overset{!}{\equiv} \underline{\text{Punkt}}\ (x,y) \text{ der (reellen) zweidim. } \underline{\text{Zahlenebene}}$$

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$$



- Realteil: $\operatorname{Re} z = x$
- Imaginärteil: $\operatorname{Im} z = y$
- Betrag: $|z| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$
- Argument: $\arg z \equiv \varphi = \sphericalangle\big((1,0), z\big)$
- Addition $\equiv$ Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$:

$$z = (x,y), \quad w = (a,b)$$

$$\rightarrow z + w = (x+a, y+b)$$

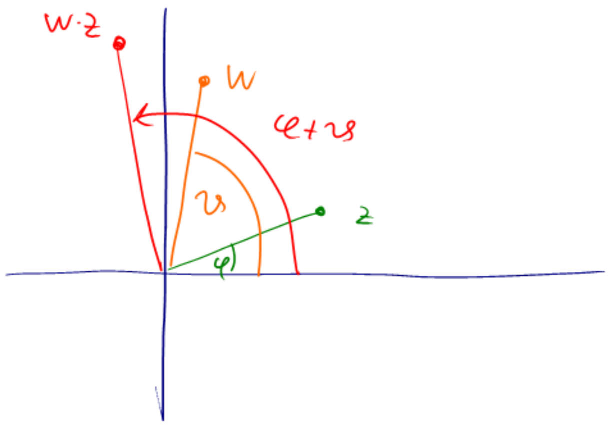
- Multiplikation:

$$\underset{\substack{\| \\ (a,b)}}{w} \cdot \underset{\substack{\| \\ (x,y)}}{z} := (ax - by, ay + bx)$$

genügt den üblichen Multiplikationsregeln:

- $z \cdot w = wz$
- $z(w+u) = zw + zu$

<u>geometrische Bedeutung</u>:



- $|wz| = |w|\,|z|$
- $\arg(wz) = \arg w + \arg z$

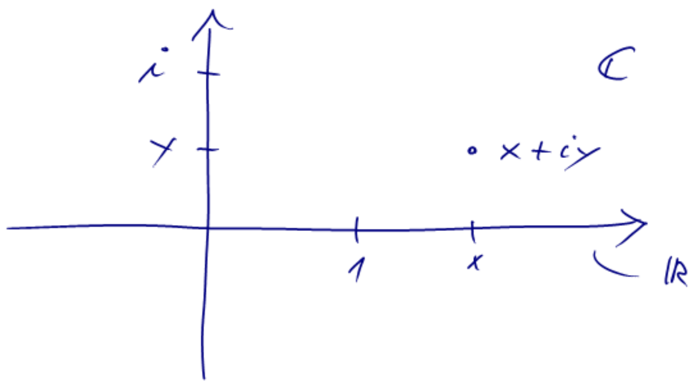
<u>Konventionen</u>:

- „$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$": $\boxed{x \equiv (x,0)}$
- <u>imaginäre Einheit</u>: $\boxed{i := (0,1)}$

$\rightarrow$ $$\underline{(x,y)} = x\,(1,0) + y\,(0,1) = \underline{x+iy}$$

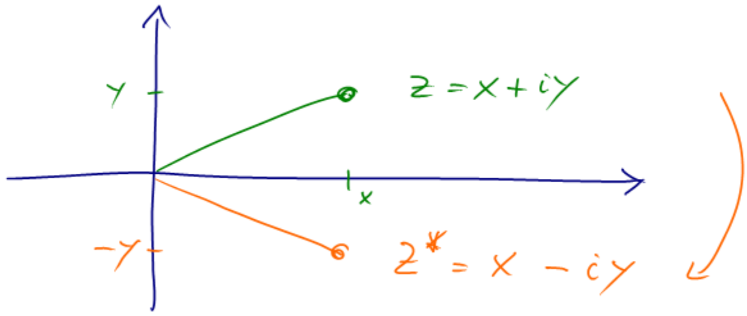
$$i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

$$\left(\text{geometrisch: } |i^2| = |i|^2 = 1;\ \arg(i^2) = 2\arg i = \pi\right)$$



komplexe Konjugation:

geometrisch: Spiegelung an reeller Achse



$$z = x + iy \xrightarrow[\text{Konj.}]{\text{kompl.}} \boxed{z^* := x - iy}$$

Anwendungen:

- $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z z^*$

$$\boxed{|z|^2 = z^* z}$$

- $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

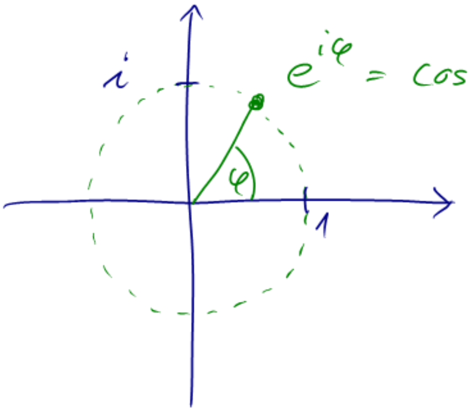
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$

komplexe Exponentialfunktion:

$$\boxed{\exp(z) \equiv e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n}$$

Euler-Identität:

für $\varphi \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$ (vgl. Übungen)



$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \equiv (\cos\varphi, \sin\varphi)$

- $i = e^{i\pi/2}$
- $-1 = e^{i\pi}$
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$
- für $n \in \mathbb{Z}$:

  $e^{i2\pi n} = 1$

Polardarstellung

$$\boxed{z = |z|\, e^{i \arg z}}$$

komplexer Vektorraum

⌈ Hintergrund: Zustände eines quantenmechanischen Systems lassen sich überlagern (superponieren)

$\longrightarrow$ q.m. Zustände bilden Vektorraum:

$\psi_1, \psi_2 \longrightarrow$ Überlagerung $\psi_1 + \psi_2$

$\rightarrow$ q. m. Zustandsraum $\equiv$ (komplexer) Vektorraum

(später mehr dazu)

- komplexer Vektorraum $\equiv$ Menge $\mathcal{H}$ mit

1) <u>Vektoraddition</u> $+ : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$(\psi, \chi) \mapsto \psi + \chi$$

2) <u>Skalarmultiplikation</u> : $\mathbb{C} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$(\lambda, \psi) \mapsto \lambda \psi$$

mit den üblichen Eigenschaften

- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bilden <u>Basis</u> eines VR $\mathcal{H}$

:$\Longleftrightarrow$ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig und vollständig

- <u>Basisdarstellung</u> bzgl. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

<u>Dimension von $\mathcal{H}$</u>

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$$

$$= a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\{\varphi_i\}_i}$$

<u>Beispiel</u> :

$$\mathbb{C}^d = \{ z = (z_1, \dots, z_d) \mid z_i \in \mathbb{C} \}$$

mit $z + w := (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_d + w_d)$

$\lambda z := (\lambda z_1, \dots, \lambda z_d) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$

hermitesches Skalarprodukt $\equiv$

Abb. $\langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi, \psi \rangle$$

mit definierenden Eigenschaften

(1) Linearität im zweiten Faktor:

- $\langle \varphi, \psi_1 + \psi_2 \rangle \overset{!}{=} \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \langle \varphi, \psi_2 \rangle$
- $\langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle$

(2) Symmetrie (bis auf kompl. Konjugation):

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle^*$$

(3) Positivität:

$$\langle \psi, \psi \rangle > 0 \quad \text{für } \psi \neq 0 \quad \text{und} \quad \langle 0, 0 \rangle = 0$$

beachte: aus (1) und (2) folgt

$$\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \lambda \varphi \rangle^* = (\lambda \langle \psi, \varphi \rangle)^* = \lambda^* \langle \psi, \varphi \rangle^*$$

d.h. $\boxed{\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda^* \langle \varphi, \psi \rangle}$,

ebenso $\boxed{\langle \varphi_1 + \varphi_2, \psi \rangle = \langle \varphi_1, \psi \rangle + \langle \varphi_2, \psi \rangle}$

herm. Skal.-produkt gibt dem kompl. VR V "Geometrie":

- φ orthogonal ψ $:\Longleftrightarrow$ $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$
- Norm / Betrag von φ: $\|\varphi\| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$

$\longrightarrow$ „Projektion auf φ":

$$P_\varphi \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi \qquad (\text{wenn } \|\varphi\| = 1)$$

erfüllt: ψ orthogonal φ $\Longrightarrow$ $P_\varphi \psi = 0$

$\psi = \lambda \varphi$ $\Longrightarrow$ $P_\varphi \psi = \psi$

(d.h. ψ parallel φ)

"geometrisch" (bis auf „imaginäre Richtungen"):