Beispiel: Magnetisierung eines Paramagneten in Abhängigkeit von Temperatur T und mag. Feld B:

$B\hat{z}$

$$\overbrace{\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow \cdots \downarrow \cdots \uparrow}^{N \text{ spins}}$$

$$s_\ell = \pm 1 \quad \rightsquigarrow \quad E_\ell = \mu B_0 s_\ell$$

Magnetisierung (in Einheiten von μ_0): $\quad M := \sum_{\ell=1}^{N} s_\ell$,

Magnet. per Spin (" "): $\quad m := \frac{M}{N} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N} s_\ell$

qualitativ:

- B groß, T klein $\longrightarrow$ $\downarrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow \cdots \downarrow$: $m = -1$
- B klein, T groß $\longrightarrow$ $\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots \uparrow \cdots \downarrow$: $m \approx 0$!

empirisches **Curie-Gesetz**:

$$m = -c\,\frac{B}{T}$$, gültig für hohe Temperaturen (derart, dass $|m| \ll 1$)

„Materialkonstante"

Statistische Physik: ($k \equiv k_B$: Boltzmannkonstante)

$$\boxed{S(E) = k \ln Z(E) = kN\, h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{E}{\mu_0 B N}\right)}$$

mit $h(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$

Vorlsg. 21

$\rightarrow \quad h'(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

mittels $\quad E = \sum_\ell \mu_0 B s_\ell = \mu_0 B N \frac{1}{N}\sum_\ell s_\ell = \mu_0 B N m$

bestimmen wir aus $\frac{1}{T(E)} \overset{!}{=} \frac{\partial S(E)}{\partial E}$ die Magnetisierung m als Fkt. von T und B:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = kN \frac{1}{2\mu_0 BN} h'\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{E}{\mu_0 BN}}_{=m}\Big) \quad ,$$

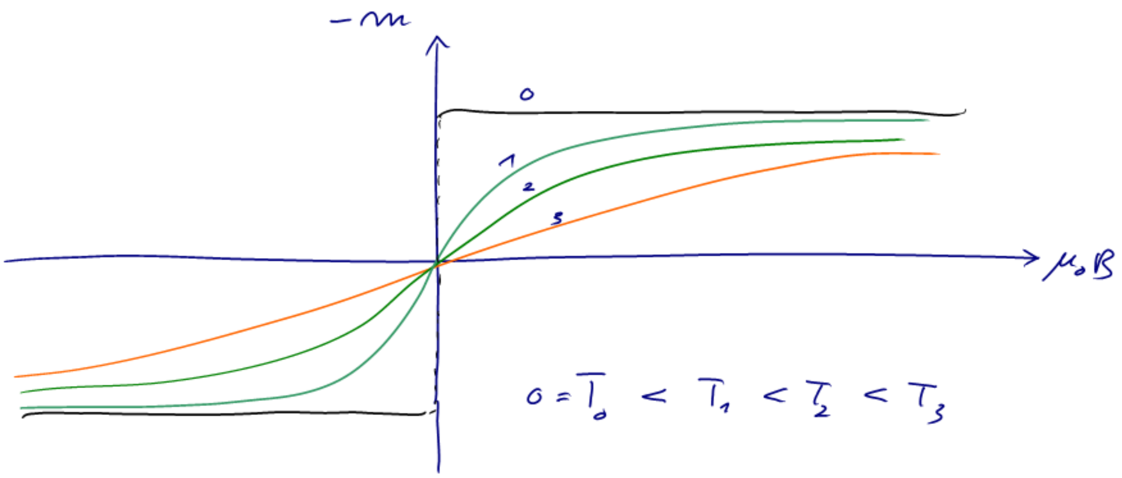
$$\rightarrow \quad \frac{2\mu_0 B}{kT} = h'\Big(\frac{1+m}{2}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1+m} - 1\Big) = \ln\Big(\frac{1-m}{1+m}\Big) ,$$

d.h. $\quad \frac{1-m}{1+m} = e^{2\mu_0 B/kT} \equiv q \quad \Longleftrightarrow \quad m = \frac{1-q}{1+q}$

also $\quad m = \frac{q^{-1/2} - q^{1/2}}{q^{-1/2} + q^{1/2}} = - \frac{\sinh \frac{\mu_0 B}{kT}}{\cosh \frac{\mu_0 B}{kT}} = - \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}$

d.h.

$$\boxed{m(B,T) = - \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}}$$



2. Beispiel: Ideales Gas

einfacher im klass. Beschreibung:

- kontinuierlicher Phasenraum Γ,

  z.B. $\Gamma = \{ x = (q, p) \mid q \in \mathbb{R}^{3N}, p \in \mathbb{R}^{3N} \}$

- Hamiltonfunktion $H(x)$;

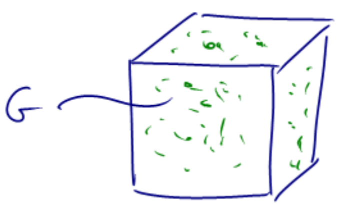
  z.B. $H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m}$

→ Grundprinzip der Stat. Phys (in klassischer Formulierung):

Im Gleichgewicht bei Energie E befindet sich System im einem zufälligen Zustand $x \in \Gamma$ gemäß mikrokanonischer Wahrscheinlichkeitsdichte:

- $\rho(x) = \frac{1}{Z(E)} \delta(H(x) - E)$
- $Z(E) = \int_\Gamma dx \, \delta(H(x) - E)$
- $\langle A \rangle_E = \int_\Gamma dx \, A(x) \rho(x)$

Ideales Gas bestehe aus N Teilchen gleicher Masse m im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mit Volumen $\mathrm{Vol}(G) = V$; keine W.W.!



- $\Gamma = G^N \times \mathbb{R}^{3N}$
- $H(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} |\vec{p}_i|^2$

$$\rightarrow \quad Z(E) = \int_\Gamma dx \; \delta_{\Delta E}(H(x) - E)$$

$$= \underbrace{\int_G d\vec{q}_1 \int_G d\vec{q}_2 \cdots \int_G d\vec{q}_N}_{= V^N} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p}_1 \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p}_2 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p}_N}_{\underbrace{E \le \frac{1}{2m} \sum_i |\vec{p}_i|^2 \le E + \Delta E}_{\Updownarrow}} \frac{1}{\Delta E}$$

$$1 \le \sum_i \left| \frac{\vec{p}_i}{\sqrt{2mE}} \right|^2 \le 1 + \underbrace{\frac{\Delta E}{E}}_{= \gamma \ll 1}$$

$$\underset{\vec{p}_i = \sqrt{2mE}\,\vec{u}_i}{=} \quad V^N \; (2mE)^{\frac{3N}{2}} \cdot \underbrace{\int d\vec{u}_1 \cdots \int d\vec{u}_N}_{\underbrace{1 \le \sum |\vec{u}_i|^2 \le 1 + \gamma}_{=:c, \text{ unabhängig von } E\,!}} \frac{1}{\Delta E}$$

$$\rightarrow \quad S(E) = k \ln Z(E) = N k \ln (V E)^{3/2} + \text{konst}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3}{2} \frac{N k}{E}$$

d. h. $$\boxed{\boxed{\frac{3}{2} k T = \frac{E}{N}}} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} \right\rangle = \underline{\underline{\left\langle \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \right\rangle}} ,$$

→ mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens ist proportional zur Temperatur T :

$$\boxed{\left\langle \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{2} kT}$$

(wie aus Experimentalphysik 1 bekannt)