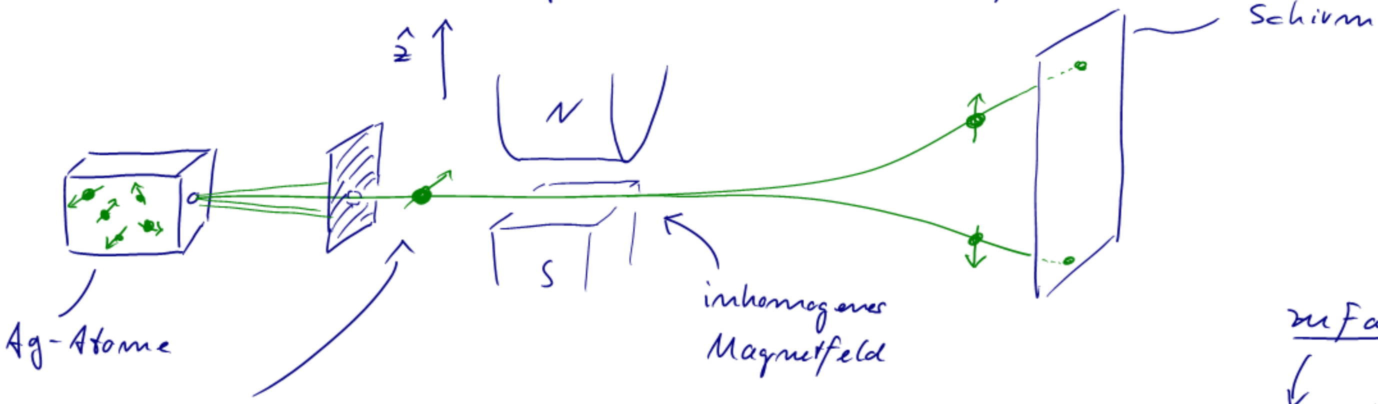
Quantenmechanik eines Zwei-Zustand-Systems:

Stern-Gerlach-Experiment (Frankfurt 1922)



Ag-Atom trägt magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu} = \underbrace{\mu_0}_{\text{konstant}} \overbrace{\vec{n}}^{\text{zufällig}} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$

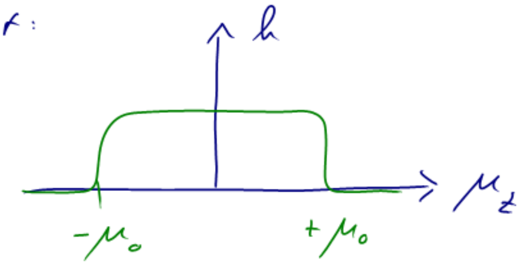
→ erfährt im inhomog. $\vec{B}$-Feld $\vec{B} \simeq B(z)\,\hat{z}$ Kraft

$$\vec{F} = \mu_z \cdot B'(z)\,\hat{z}$$

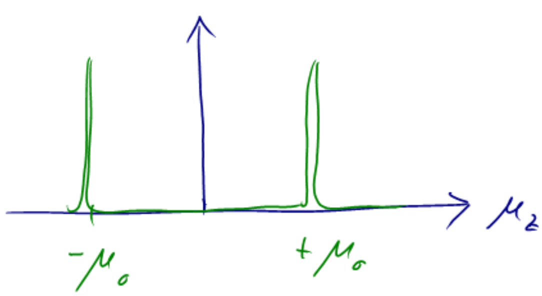
→ $\boxed{\text{Ablenkung in } z\text{-Richtung direkt proportional zu } \mu_z\,!}$

„klassische Erwartung":

- $\hat{n}$ zufällig verteilt → μ_z zwischen $-\mu_0$ und $+\mu_0$ gleichmäßig verteilt:



Experiment: μ_z nimmt i. w. nur Werte $-\mu_0$ und $+\mu_0$ an:



Deutung: wegen $\boxed{\vec{\mu} \propto \vec{L}}$:

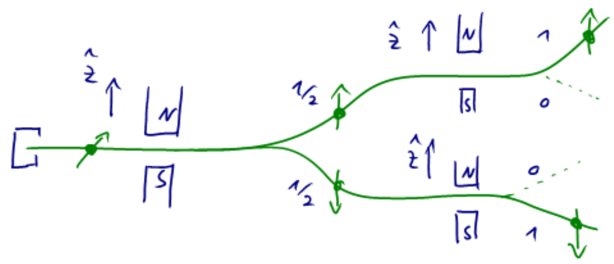
mag. Moment ($\vec{\mu}$), Drehimpuls ($\vec{L}$)

Quantisierung von μ_z $\widehat{=}$ Quantisierung von l_z !

„<u>Drehimpulsquantisierung</u>" (vgl. Bohrsches Atommodell)

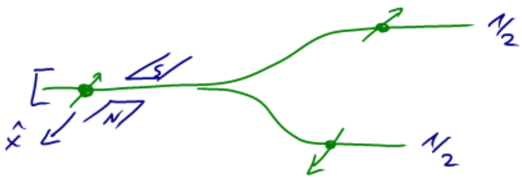
<u>weitere Experimente (schematisch):</u>

1)

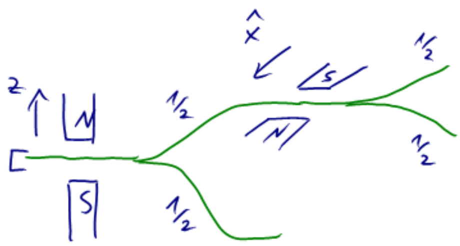


Verzweigungswahrscheinlichkeiten

2) Ausrichtung des S.-G.-Magneten in <u>$\hat{x}$-Richtung</u>:



3)



etc.

einheitliche Beschreibung dieser und weiterer S. G.-Exp. mittels

"<u>Quantenmechanik des S.-G.-Experiments</u>":

Postulate:

(P1) <u>Zustandsraum</u> = zweidimensionaler komplexer Vektorraum $\mathcal{H}$ mit herm. Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$ („$\mathcal{H}$ Hilbertraum")

<u>Zustand des Ag-Atoms</u> $\hat{=}$ normierter Vektor $\psi \in \mathcal{H}$

(P2) <u>Messung und Zustandspräparation</u>

Messung M prüfe das Vorliegen eines Zustands φ_M. Befindet sich Atom im Zustand ψ, dann M mit <u>Wahrscheinlichkeit</u>

$$p = |\langle \varphi_M, \psi \rangle|^2$$

<u>positiv</u>. Nach Messung mit positivem Ausgang ist Atom im Zustand φ_M.

hiermit gelingt folgende Beschreibung der S.G.-Experimente:

<u>Ausgangspunkt</u>:

nach Passage durch SG-Magnet in $\hat{z}$-Richtung befindet sich Atom entweder

⟶

im Zustand „z+" $(\mu_z = +\mu_0) \;\hat{=}\; \psi_+ \in \mathcal{H}$

oder " " „z−" $(\mu_z = -\mu_0) \;\hat{=}\; \psi_- \in \mathcal{H}$,

wobei nach (P1) $\|\psi_+\| = 1$, $\|\psi_-\| = 1$;

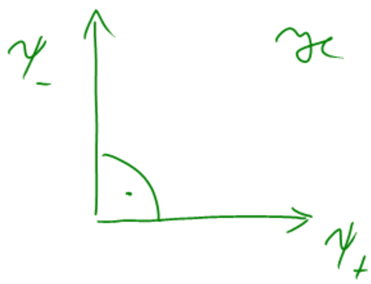
tatsächlich ψ_+ orthogonal ψ_- :

denn „z+" - Messung an Atom im Zustand „z−" immer negativ, d.h. mit Wkt 0 positiv

mit $\varphi_M = \psi_+$, $\psi = \psi_-$ und $p = |\langle \varphi_M, \psi\rangle|^2$

ist $0 = |\langle \psi_+, \psi_-\rangle|^2$; $\Rightarrow \langle \psi_+, \psi_-\rangle = 0$

also ψ_+ orthogonal ψ_- .

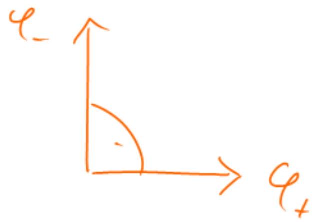


analog für Zustände „x+" $(\mu_x = \mu_0)$ und „x−" $(\mu_x = -\mu_0)$ nach Passage eines Atoms durch S.G.-Magnet im x-Richtung:

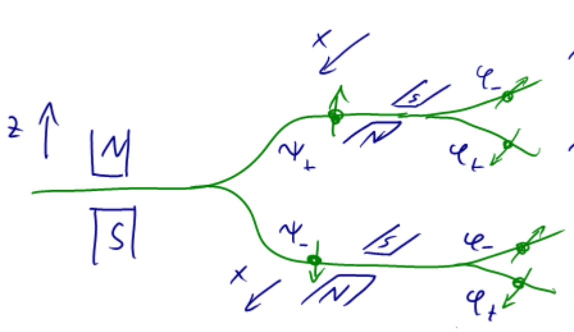
$$„x+" \;\hat{=}\; \varphi_+ \in \mathcal{H}$$

$$„x-" \;\hat{=}\; \varphi_- \in \mathcal{H}$$

mit $\|\varphi_+\| = 1$, $\|\varphi_-\| = 1$ und wiederum φ_+ orthogonal φ_- ;



relative Lage von $\psi_\pm$ zu $\varphi_\pm$ ergibt sich aus folg. Experimenten:

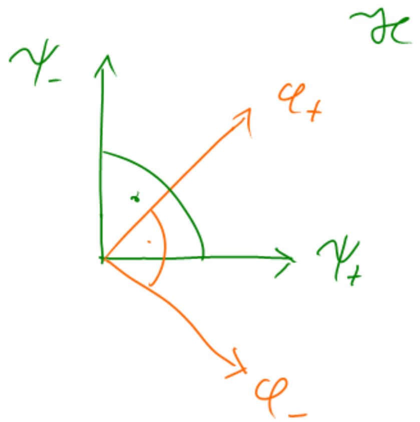


$$\left.\begin{aligned}
1/2 &= n_1 \overset{!}{=} |\langle \varphi_-, \psi_+ \rangle|^2 \\
1/2 &= n_2 \overset{!}{=} |\langle \varphi_+, \psi_+ \rangle|^2 \\
1/2 &= n_3 \overset{!}{=} |\langle \varphi_-, \psi_- \rangle|^2 \\
1/2 &= n_4 \overset{!}{=} |\langle \varphi_+, \psi_- \rangle|^2
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Gleichungen (*) und $\langle \varphi_-, \varphi_+ \rangle = 0$ erfüllt für

$$\boxed{\begin{aligned}
\varphi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ + \psi_-) \\
\varphi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ - \psi_-)
\end{aligned}} \qquad (1)$$

d.h.:



Gleichungen (1) bedeuten:

$\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ + \psi_-)$ $\hat{=}$ „X+" ist die symmetrische Superposition von „Z+" und „Z-"

$\varphi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ - \psi_-)$ $\hat{=}$ „X-" ist die antisymmetrische Superposition von „Z+" und „Z-"