(P3) (vorläufig)

Zeitentwicklung genügt $\boxed{\frac{d}{dt}\psi(t) = -i H \psi(t)}$ (1)

wobei H hermitescher Operator

Welcher physikalischen Größe entspricht H?

wir zeigen:

$$\boxed{A \text{ Erhaltungsgröße (unter Dynamik (1))} \iff HA \overset{!}{=} AH} \quad (2)$$

Def: für alle Lösungen $\psi(t)$ von (1) ist $\langle A \rangle_{\psi(t)}$ konstant

Berechnung von $\frac{d}{dt}\langle A \rangle_{\psi(t)}$: mit $\psi \equiv \psi(t)$, $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle$

und Produktregel erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle_\psi = \langle \dot\psi, A\psi \rangle + \langle \psi, A\dot\psi \rangle \overset{(1)}{=} \langle -iH\psi, A\psi \rangle + \langle \psi, A(-iH)\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, iHA\psi \rangle + \langle \psi, -iAH\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, i(HA - AH)\psi \rangle$$

mit Kommutator von A, B:

$$\boxed{[A, B] := AB - BA}$$

erhalten wir somit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t), i[H, A]\psi(t) \rangle}$$

d.h.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = \langle i\,[H,A]\rangle_{\psi(t)}} \qquad (3)$$

!

Hamilt. Mechanik: $\quad x(t) = (q(t),\ p(t))$

$$\boxed{\frac{d}{dt} A(x(t)) \overset{!}{=} \{H, A\}_{x(t)}} \qquad (3')$$

mit Poisson-Klammer: $\quad \{A, B\} = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\ell}\frac{\partial B}{\partial p_\ell} - \frac{\partial B}{\partial q_\ell}\frac{\partial A}{\partial p_\ell}\right)$

aus (3) folgt unmittelbar Äquivalenz (2):

„⇒" $\quad A$ Erhaltungsgröße $\rightarrow$ für alle $\psi_0 \equiv \psi(t=0)$

$$0 = \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)}\Big|_{t=0} \overset{(3)}{=} \langle\psi_0|\,\underbrace{i\,[H,A]}_{\text{hermitesch!}}\,|\psi_0\rangle$$

$\rightarrow \quad [H,A] = 0$

„⇐" $\quad [H,A] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} \overset{(3)}{=} \langle i\,[H,A]\rangle_{\psi(t)} = 0$

d.h. A Erhaltungsgröße.

Da trivialerweise $[H,H] = 0$ ist H als „Generator" der Zeitentwicklung (1) immer Erhaltungsgröße!

$\rightarrow \quad \boxed{H \equiv \text{Energie}}$, bis auf Faktor λ der

Dimension $\quad$ Energie × Zeit ≡ Wirkung !

$$\rightarrow \qquad \dot{\psi}(t) = -\frac{iH}{\lambda}\,\psi(t)$$

numerische Übereinstimmung mit „Energie" der klassischen Mechanik erfordert

$$\lambda \overset{!}{=} \hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1{,}04\ldots \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

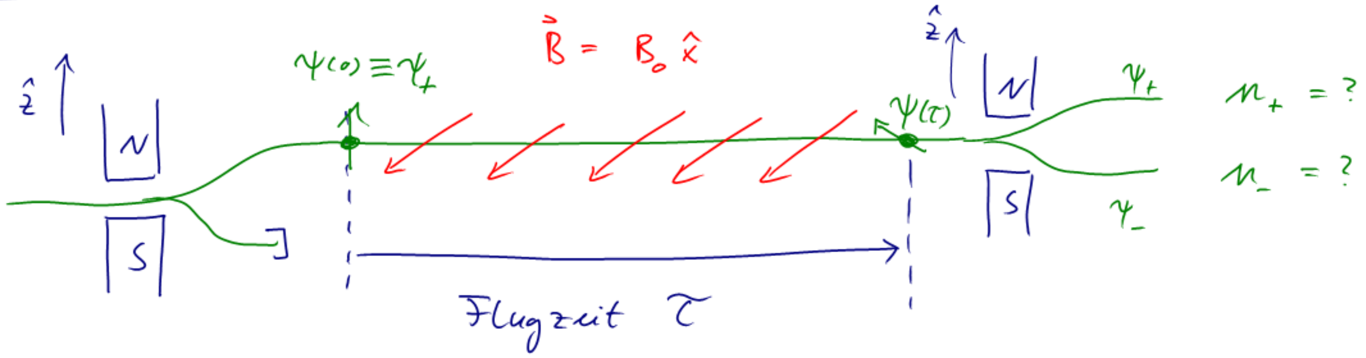
Plancksches Wirkungsquantum

→ (P3) Dynamik: die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle$ genügt der Schrödinger-Gleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle},$$

hierbei ist H der Energie- oder Hamilton-Operator des Systems.

Beispiel:



Energie eines mag. Dipols $\vec{\mu}$ im Magnetfeld $\vec{B}$: $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

→ Hamilton-Operator: $\quad H = -B_0\hat{\mu}_x$

mit $\hat{\mu}_x = \mu_0\,|\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| - \mu_0\,|\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$ also

$$\boxed{H = B_0 \mu_0 \left(|\varphi_-\rangle\langle\varphi_-| - |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| \right)}$$

(wobei $\quad |\varphi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_+\rangle \pm |\psi_-\rangle \right)$)

<u>allg. Problem</u>:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t=0: & \psi(0) = \psi_0 \\ & \Big\downarrow \quad i\hbar \dot{\psi}(t) \overset{!}{=} H \psi(t) \\ t=\tau: & \psi(\tau) = \,? \end{array}}$$

Schrödinger-GL $\quad \dot{\psi}(t) = -\frac{iH}{\hbar} \psi(t) \quad$ ist <u>homogene</u> <u>lineare</u> DGL <u>1. Ordnung</u>:

$$\dot{y}(t) = a\, y(t)$$

→ spezielle Lösung zum Anfangswert $y(0) = y_0$:

$$y(t) = e^{at} y_0$$

hier: $\quad y(t) = \psi(t) \quad$ (<u>Vektor</u>)

$\qquad\quad a = -\frac{iH}{\hbar} \quad$ (<u>Operator</u>)

→ spezielle Lösung $\psi(t)$ zum A.W. $\psi(0) = \psi_0$:

$$\boxed{\psi(t) = \underbrace{e^{-i\frac{H}{\hbar}t}}_{\text{Operator!}} \psi_0}$$

mit $\quad e^A \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell \quad$ (vgl. Übung 11)