zweckmäßig ist

Def.: <u>Zeitentwicklungsoperator</u> (eines q.m. Systems mit Hamiltonoperator H):

$$\boxed{U(t) := \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right)} \quad \left(\equiv e^{-iHt/\hbar}\right)$$

spezielle Lösung der S.-Gl. $|\dot\psi(t)\rangle = -\frac{iH}{\hbar}|\psi(t)\rangle$ zum AW $|\psi_0\rangle$ zur Zeit $t=0$ lautet damit

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle}$$

<u>Darstellung in Energiebasis:</u>

$E_0, E_1, \ldots E_N$ (*) seien Eigenwerte ($\equiv$ <u>Eigenenergien</u>) von H zu (orthonormalen) Eigenvektoren ($\equiv$ <u>Energieeigenzustände</u>) $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots, |\varphi_N\rangle$;

d.h. $$H = \sum_{n=0}^{N} E_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \; ;$$

$$\rightarrow \quad H^\ell = \sum_{n=0}^{N} E_n^\ell |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

$$\rightarrow \quad U(t) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) = \sum_\ell \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^\ell H^\ell$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\frac{it}{\hbar}E_n\right)^\ell}_{= e^{-iE_n t/\hbar}} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

d.h. $$\boxed{U(t) = \sum_{n=0}^{N} e^{-iE_n t/\hbar} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}$$

((*) i. d. R. $E_0 \le E_1 \le E_2 \;\ldots$)

Beispiele

1) System befinde sich zur Zeit $t=0$ im Energieeigenzustand $|\varphi_m\rangle$:

$$|\psi_0\rangle \equiv |\varphi_m\rangle \xrightarrow{\;t\;} |\psi(t)\rangle = U(t)\,|\varphi_m\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{N} e^{-iE_n t/\hbar}\, |\varphi_n\rangle \underbrace{\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle}_{=\,\delta_{nm}}$$

$$= e^{-iE_m t/\hbar}\, |\varphi_m\rangle$$

d. h.
$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\omega_m t}}_{\substack{\text{Phasenfaktor}\\ \text{vom Betrag } 1}} |\varphi_m\rangle \quad , \quad \omega_m = E_m/\hbar$$

$\rightarrow$ keine Zustandsänderung, Energieeigenzustände sind stationär.

insbesondere
$$p_n(t) := |\langle\varphi_n|\psi(t)\rangle|^2 = \begin{cases} 1 : & n=m \\ 0 : & n\neq m \end{cases}.$$

2) System zur Zeit $t=0$ in Superposition zweier Energieeigenzustände $|\varphi_m\rangle$ und $|\varphi_{m'}\rangle$; etwa

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_m\rangle + |\varphi_{m'}\rangle\right)$$

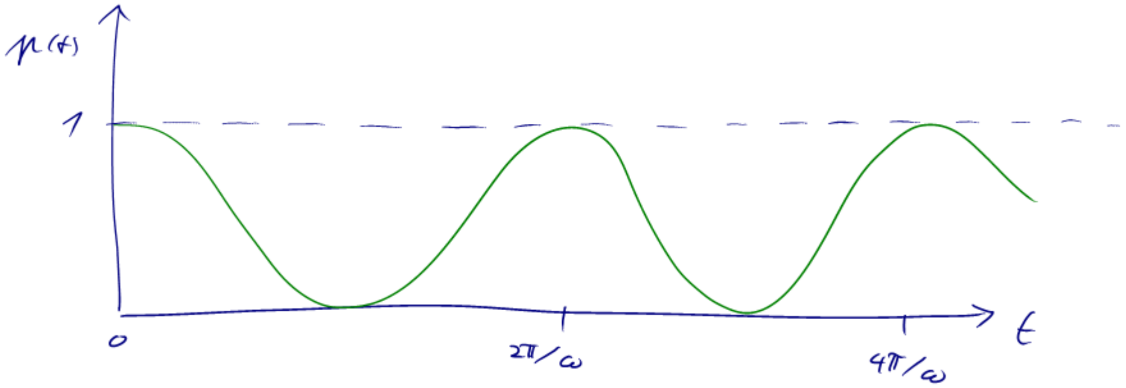
$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U(t)|\varphi_m\rangle + U(t)|\varphi_{m'}\rangle\right)$$

$$\overset{1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_m t}|\varphi_m\rangle + e^{-i\omega_{m'} t}|\varphi_{m'}\rangle\right)$$

Wht., dass System nach Zeit t wieder im Anfangszustand $|\psi_0\rangle$?

$$p(t) = |\langle\psi_0|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-i\omega_m t} + e^{-i\omega_{m'} t}\right|^2$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\underline{\underline{(\omega_m - \omega_{m'})t}}$$



„Schwebung" mit Frequenz $\omega = \omega_m - \omega_{m'} = \dfrac{E_m - E_{m'}}{\hbar}$

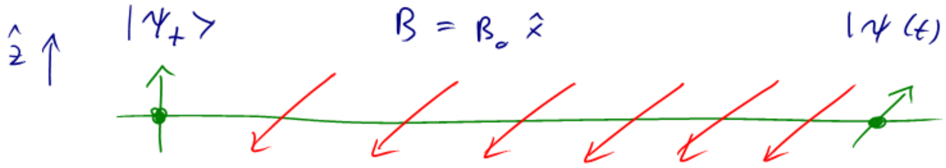
3) allg. Anfangszustand $|\psi_0\rangle$:

$$\rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{N} e^{-iE_n t/\hbar}\,|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi_0\rangle$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega_n t}\,\langle\varphi_n|\psi_0\rangle\,|\varphi_n\rangle}$$

4) Beispiel aus letzter Vorlesung:

$|\psi_+\rangle$ $\qquad \vec{B} = B_0\,\hat{x}$ $\qquad |\psi(t)\rangle = ?$



$$\rightarrow \quad H = \mu_0 B_0\left(|\varphi_-\rangle\langle\varphi_-| - |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+|\right)$$

$$\rightarrow \quad U(t) = e^{-i\omega t}|\varphi_-\rangle\langle\varphi_-| + e^{i\omega t}|\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| \quad , \quad \omega = \frac{\mu_0 B_0}{\hbar}$$

da $\quad |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle\right)$ erhalten wir

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)\,|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}|\varphi_+\rangle + e^{-i\omega t}|\varphi_-\rangle\right)$$

$$= \cos\omega t\,|\psi_+\rangle + i\sin\omega t\,|\psi_-\rangle$$

$$|\varphi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle \pm |\psi_-\rangle\right)$$

$\rightarrow \quad p_+(t) = |\langle\psi_+|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\omega t$

$\quad\quad p_-(t) = |\langle\psi_-|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\omega t \quad (= 1 - p_+(t))$

$\rightarrow$ • $\langle\mu_z\rangle_{|\psi(t)\rangle} = \mu_0\left(p_+(t) - p_-(t)\right) = \mu_0\cos 2\omega t$

• $\langle\mu_x\rangle_{|\psi(t)\rangle} = \mu_0\,\langle\,|\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| - |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|\,\rangle_{\psi(t)} = 0$

• $\langle\mu_y\rangle_{|\psi(t)\rangle} = \mu_0|\langle\chi_+|\psi(t)\rangle|^2 - \mu_0|\langle\chi_-|\psi(t)\rangle|^2$

$$= \mu_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)^2 - \mu_0\left(\cos\omega t - \sin\omega t\right)^2$$

$$|\chi_\pm\rangle = \left(|\psi_+\rangle \pm i|\psi_-\rangle\right)/\sqrt{2}$$

$$= 2\mu_0\cos\omega t\,\sin\omega t = \mu_0\sin 2\omega t$$

also $\quad \langle\vec{\mu}\rangle_{\psi(t)} \equiv \begin{pmatrix}\langle\mu_x\rangle_t\\ \langle\mu_y\rangle_t\\ \langle\mu_z\rangle_t\end{pmatrix} = \mu_0\begin{pmatrix}0\\ \sin 2\omega t\\ \cos 2\omega t\end{pmatrix}$

$\hat{=}$ Larmorpräzession des mag. Moments $\langle\vec{\mu}\rangle_t$ mit Larmor-frequenz $\omega_L = 2\omega = 2\frac{\mu_0 B_0}{\hbar}$ um $-\hat{x}$ - Achse :