$\underline{\underline{E \geq 0}}$: $\quad r_{min} \leq r(t)$

ungebundene Bewegung

quantitative Bestimmung von $r(\varphi)$

Energiegleichung : $\quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U_{eff}(r)} \quad \rightarrow r(t)$

$\rightarrow \varphi(t)$

angenehmer : $\underline{\underline{\underline{r(\varphi)}}}$!

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \underset{\text{Azimuthalgl.}}{=} \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{\ell}{mr^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2m}}{\ell} r^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}}$$

DGL zur Bestimmung von $r(\varphi)$

„Trennung der Variablen" führt auf

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r_\varphi} \frac{dr}{\underline{\underline{r^2}} \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)^{1/2}}$$

$$\underset{r = 1/s}{=} \int_{1/r_\varphi}^{1/r_0} \frac{ds}{\left(\underbrace{\frac{2mE}{\ell^2}}_{\overset{!!}{A}} + \underbrace{\underbrace{2\frac{m\alpha}{\ell^2}}_{\overset{!!}{B}} s - s^2}_{-(s-B)^2 + B^2}\right)^{1/2}}$$

$\rightarrow dr = -\frac{1}{s^2} ds = \underline{\underline{-r^2}} ds$

d.h. nach $s \rightarrow s - B$:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{1/r_\varphi - B}^{1/r_0 - B} \frac{ds}{(A + B^2 - s^2)^{1/2}} = \arccos \frac{1/r_\varphi - B}{\sqrt{A + B^2}} + c$$

$$\left(\arccos \frac{x}{a}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

wähle $\varphi_0 = -\alpha$, dann

$$\cos\varphi = \frac{1/r_\varphi - B}{\sqrt{A + B^2}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{r(\varphi) \equiv r_\varphi = \frac{1/B}{1 + \sqrt{1+\frac{A}{B^2}}\,\cos\varphi} \equiv \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}}$$

Polardarstellung von
Ellipse / Parabel / Hyperbel
$\varepsilon < 1$ / $\varepsilon = 1$ / $\varepsilon > 1$

wir lesen ab: $\quad p = 1/B = \frac{\ell^2}{m\alpha}$, $\quad \alpha = G\,m\,M$

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{A}{B^2} = 1 + \frac{2mE}{\ell^2}\,\frac{\ell^4}{m^2\alpha^2}$$

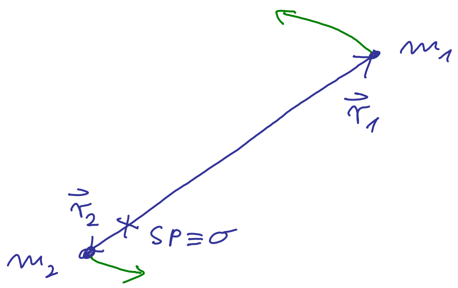
d.h. $\quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2} \begin{cases} < 1 & : \; E < 0 \; : \; \text{Ellipse} \\ = 1 & : \; E = 0 \; : \; \text{Parabel} \\ > 1 & : \; E > 0 \; : \; \text{Hyperbel} \end{cases}$

Ergänzung: Annahme, dass Position der Sonne inertialer Punkt für $M \gg m$ in guter Näherung erfüllt, aber eigentlich unnötig:

wähle stattdessen σ = Schwerpkt von Sonne und Planet, bewegt sich nach Schwerpunktsatz geradlinig-gleichförmig und ist damit inertialer Pkt.

Sei $\vec{r}_2$ Ortsvektor der Sonne, $m_2 = M$

$\vec{r}_1$ " " des Planeten, $m_1 = m$



$$\vec{F}_{12} = -\frac{\alpha}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Dynamik des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

$$-\vec{F}_{21} = +\vec{F}_{12}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\vec{F}_{12}$$

mit reduzierter Masse $\mu := \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ also

$$\boxed{\mu\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))}\quad , \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\,\hat{r}$$

bis auf μ statt m ist das dieselbe Gleichung wie zuvor.

d.h.
- Schwerpkt Sonne – Planet bewegt sich geradlinig-gleichförmig
- Relativvektor $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ beschreibt Keplerbahn (wie oben gezeigt)