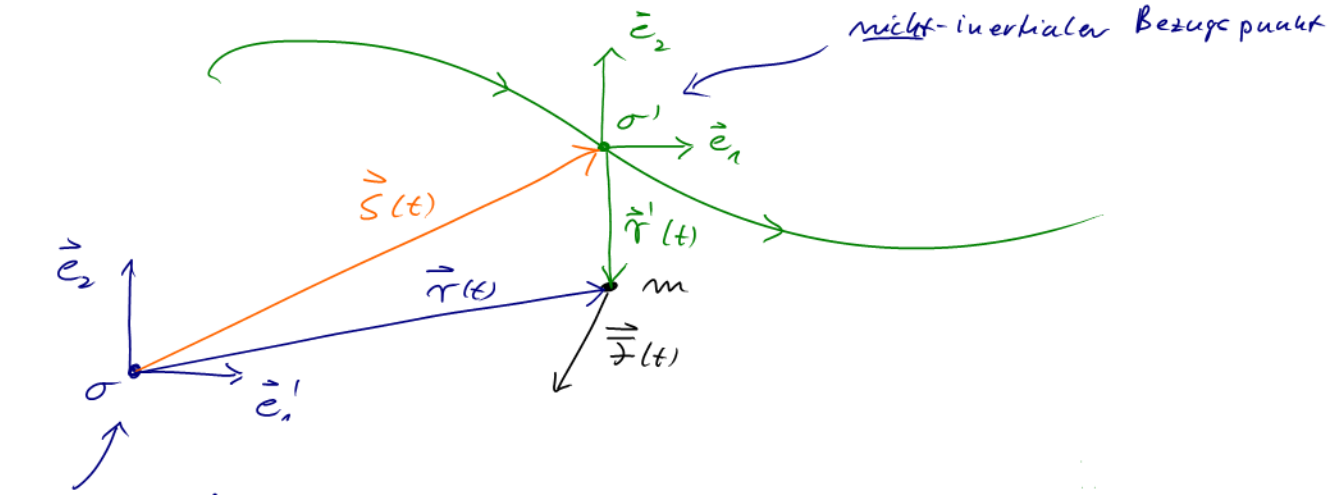
Beschleunigte und rotierende Bezugssysteme, Scheinkräfte, Äquivalenz von träger und schwerer Masse, Gravitationskraft als Scheinkraft

Erinnerung: Newtons Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}}(t) \overset{!}{=} \vec{F}(t)$ gilt nur im Inertialsystem!

Aber: Beschreibung einer Bewegung bzgl. beschleunigter und/oder rotierender Bezugssysteme oft wesentlich zweckmäßiger;

Beispiele: – Beobachter im beschleunigten Fahrzeug
– " " auf rotierender Erde



allg. Problem: offenbar impliziert Newtons Bwgl. $m\ddot{\vec{r}}(t) \overset{!}{=} \vec{F}(t)$ bzgl. σ, dass bzgl. σ'

$$m\ddot{\vec{r}}\,'(t) \cancel{\neq} \vec{F}'(t) \qquad (1)$$

(sobald $\ddot{\vec{S}} \neq \vec{0}$)

allg. Lösung: korrigiere (1) durch Hinzufügen einer geeigneten Scheinkraft $\vec{F}_S'(t)$, so dass $m\ddot{\vec{r}}\,'(t) \overset{!}{=} \vec{F}'(t) + \vec{F}_S'(t)$!

Bestimmung der Scheinkraft bzgl. <u>beschleunigten</u> Bezugspunkt

$$\sigma' = \sigma + \vec{s}(t)$$

bei unveränderten Richtungen $\vec{e}_i' = \vec{e}_i$ (vgl. obige Skizze):

aus Newtons Bewegungsgl. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ bzgl. σ
erhalten wir mit $\vec{r} = \vec{s} + \vec{r}'$

$$m(\ddot{\vec{s}} + \ddot{\vec{r}}') = \vec{F} \quad ,$$

d.h. $$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{s}}$$

die Scheinkraft lautet somit hier

$$\vec{F}_s = -m\ddot{\vec{s}} \quad ;$$

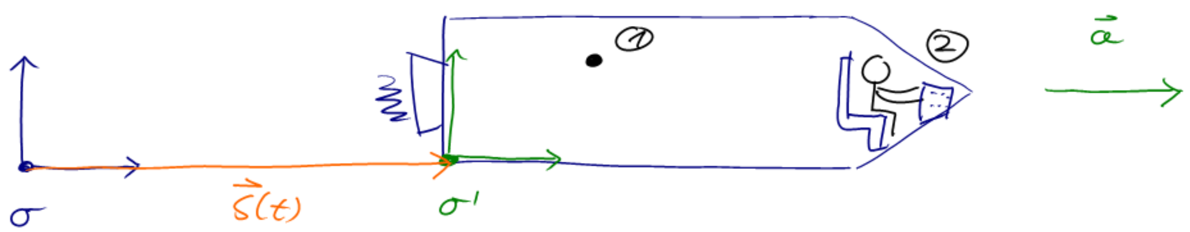
wegen $\vec{e}_i' = \vec{e}'$ ist $\vec{F} = \vec{F}'$, $\vec{F}_s' = \vec{F}_s$, $\vec{s} = \vec{s}'$;

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}' + \vec{F}_s' \\ \text{mit} \quad \vec{F}_s' = -m\ddot{\vec{s}}' \end{array}}$$

$$(\vec{s} = \overline{\sigma\sigma'} \;, \quad \vec{e}_i' = \vec{e}_i)$$

Elementares Beispiel:

gleichmäßig beschleunigte Raumfähre fernab aller Massen:



für $t=0$ sei $\vec{s} = \vec{o}$ und $\dot{\vec{s}} = 0$,

$$\rightarrow \quad \vec{s}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad ;$$

①: MP der Masse m, kräftfrei und ruhend bzgl. O,
gelte $\vec{r}(t) = \vec{r}_0$

$\rightarrow$ a) Newtonsche Bewegungsgleichung bzgl. O,

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad ,$$

mit $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0}$ und $\vec{F} = \vec{o}$ trivialerweise erfüllt.

b) Newt. Bewg.gl. bzgl. O':

$$m \ddot{\vec{r}}\,' = \vec{o} + \vec{F}_s' = -m \ddot{\vec{s}} = -m \vec{a}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}\,'(t) = -\vec{a} \quad ,$$

da $\vec{r}\,'(0) = \vec{r}_0$ und $\dot{\vec{r}}\,'(0) = \vec{o}$ folgt

$$\boxed{\vec{r}\,'(t) = \vec{r}_0 - \frac{1}{2} \vec{a} t^2}$$

Fazit: die gleichmäßige Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}\,'(t) = -\vec{a}$ des MPs ① bzgl. O' deutet ein bzgl. O' ruhender Beobachter als Wirkung der Scheinkraft $\vec{F}_s = -m\vec{a}$ auf ①.

②: Astronaut der Masse m_A ruht bzgl. O';
welche Kontaktkraft $\vec{F}_K$ übt Sitz auf ihn aus?

a) Bestimmung von $\vec{F}_K$ <u>bzgl. O</u>:

Astronaut der Masse m_A erfährt durch $\vec{F}_K$ gleichmäßige Beschleunigung $\vec{a}$, d.h. nach Newton

$$\vec{F}_K = m\,\vec{a} \,.$$

b) Bestimmung von $\vec{F}_K$ <u>bzgl. O'</u>:

bzgl. O' <u>ruhender</u> Astronaut erfährt

1) Kontaktkraft durch Sitz: $\vec{F}_K'$
2) Scheinkraft $\vec{F}_S' = -m_A\,\vec{a}$

weshalb nach Newton

$$\vec{0} = m_A\,\ddot{\vec{r}}_A'(t) = \vec{F}_K' - m_A\,\vec{a}$$

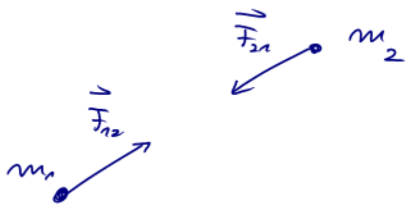
d.h. $\vec{F}_K' = m_A\,\vec{a}$

beide Sichtweisen führe also zum <u>selben</u> Ergebnis:

$$\vec{F}_K = \vec{F}_K' = m_A\,\vec{a} \,.$$

<u>Exkurs</u>: <u>träge</u> und <u>schwere</u> Masse

In Newtons Gravitationsgesetz,



(1) $$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,r_1^2 \,,$$

verbirgt sich die <u>Gleichsetzung</u> zweier im Grunde genommen unabhängiger physikalischer Größen, nämlich die Gleichsetzung von trägen und schwerer Masse eines Körpers.

Die bisher bekannte Masse m eines MPs wird auch als träge Masse bezeichnet und ist durch Bewegungsgesetz ($m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, "Trägheitsgesetz") und Gegenwirkungsprinzip ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) definiert.
($\rightarrow$ dynamische Massenbestimmung)
Gemäß dieser Definition ist die träge Masse eines Körpers offenbar Ausdruck seiner Trägheit gegenüber beschleunigende Kräfte.

Im Gravitationsgesetz (1) wird durch die Verwendung der trägen Massen m_1 und m_2 stillschweigend angenommen, dass die Trägheit der Körper auch die Schwerkraft zwischen ihnen bestimmt.
$\rightarrow$ ("Schwere")

Diese Annahme ist keinesfalls selbstverständlich!

Wesentlich plausibler wäre ein Gravitationsgesetz

$$(2) \qquad \vec{\tilde{F}}_{12} = -G\frac{\tilde{m}_1\tilde{m}_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12},$$

wobei die hierdurch definierten schweren Massen $\tilde{m}_1$ und $\tilde{m}_2$ der Körper unabhängig von ihren trägen Massen m_1 und m_2 wären;

genauso, wie etwaige elektrische Ladungen q_1 und q_2 der Körper und die daraus resultierende Coulomb-

Kraft $\vec{F}_{12}^{\,C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$ unabhängig von den trägen Massen sind.

Die Konsequenz unabhängiger träger und schwerer Massen wären unterschiedliche Schwerebeschleunigungen für verschiedene Körper:

↳ Schwerebeschl. $\vec{a}_1$ bestimmt durch

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{\tilde{F}}_{12} = -G\,\frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{r^2}\,\hat{r}$$

d.h. $$\vec{a}_1 = \left(\frac{\tilde{m}_1}{m_1}\right)\cdot\left(-G\,\frac{\tilde{m}_2}{r^2}\,\hat{r}\right)$$

Im Experiment findet man aber für alle Körper dieselbe Beschleunigung (natürlich in Abhängigkeit von $\tilde{m}_2$ und r)!

Galilei: "alle Körper fallen mit derselben Beschleunigung"

Newton erhält durch Pendelexperimente (!):

$$\frac{\Delta a}{a} \lesssim 10^{-5}$$

heute: $$\frac{\Delta a}{a} \lesssim 10^{-13} \quad !$$

Problem: für die beobachtete strikte Proportionalität ("Äquivalenz") von träger und schwerer Masse gibt Newtons Theorie keine Begründung!

Einstein: die strikte Proportionalität der Gravitationskraft auf einen Körper zur seiner trägen Masse ist darin begründet, dass es sich bei der Gravitationskraft um eine Scheinkraft handelt, die per Konstruktion diese Eigenschaft hat.

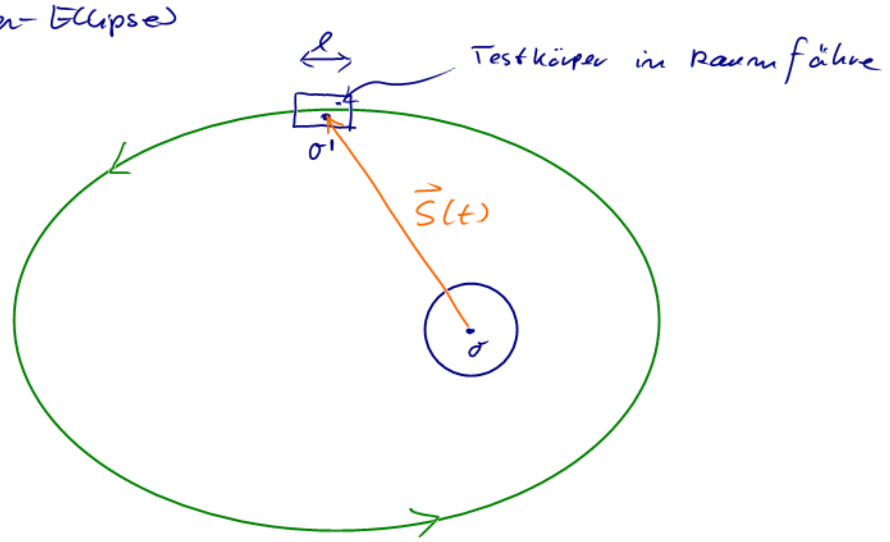
$\Rightarrow$ allgemeine Relativitätstheorie

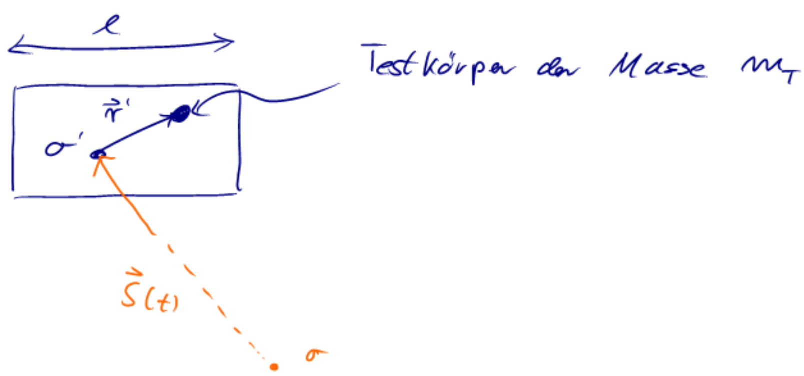
Konsequenz: als Scheinkraft lässt sich die Gravitationskraft durch Wahl eines geeigneten Bezugssystems eliminieren!

$\Rightarrow$ "Schwerelosigkeit im frei fallenden Bezugssystem"

Beispiel:

Schwerelosigkeit in einer Raumfähre auf Erdumlaufbahn ($\equiv$ Kepler-Ellipse)





Raumfähre bewegt sich unter Schwerkraft der Erde,

$$\longrightarrow \quad \ddot{\vec s} = -G \frac{m_E}{s^2} \hat{s}$$

$\longrightarrow$ Scheinkraft auf Testkörper:

$$\vec F_s = -m_T \ddot{\vec s} = +G m_T m_E \frac{\vec s}{s^3}$$

Gravitationskraft auf Testkörper:

$$\vec F_G = -G \frac{m_T m_E}{r^2} \hat{r} = -G m_T m_E \frac{\vec s + \vec r'}{|\vec s + \vec r'|^3}$$

$\vec r = \vec s + \vec r'$

$\longrightarrow$ bzgl. O' erfährt Testkörper die Kraft

$$|\vec F_G + \vec F_s| = G m_T m_E \left| \frac{\vec s}{s^3} - \frac{\vec s + \vec r'}{|\vec s + \vec r'|^3} \right| \approx \frac{G m_T m_E}{s^2} \, O\left(l/|\vec s|\right)$$

$|\vec r'| < l \ll |\vec s|$

also

$$\frac{|\vec F_G + \vec F_s|}{|\vec F_s|} = O\left(l/|\vec s| \right) \lesssim 10^{-5} \ll 1$$

$|\vec s| > R_E = 6 \cdot 10^6 m$

$l \simeq 10 m$

d.h. die Schwerkraft der Erde auf den Testkörper erscheint bzgl. Raumfähre um mindesten den Faktor 10^{-5} reduziert!

(beachte: für $l \to 0$ offenbar $|\vec{F}_G + \vec{F}_S| = 0$)