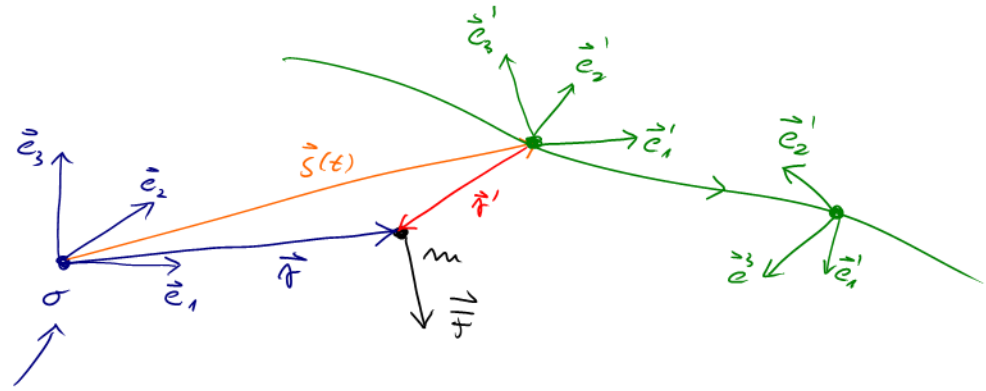
Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem



- inertiales Bezugssystem K gegeben durch O und ONB $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
- rotierendes (und beschleunigte) Bezugssystem K' gegeben durch

  1) Translationsvektor $\vec{s}(t) = \overrightarrow{OO'(t)}$

  2) Drehmatrix (zeitabhängig)

$$D = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') \equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{r} = \vec{s} + D\vec{r}'}$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{s}} + \dot{D}\vec{r}' + D\dot{\vec{r}}'$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{s}} + \ddot{D}\vec{r}' + 2\dot{D}\dot{\vec{r}}' + D\ddot{\vec{r}}'$$

aus der Newtonschen Bewegungsgl. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ in K folgt somit

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{s}} + m\ddot{D}\vec{r}' + 2m\dot{D}\dot{\vec{r}}' + mD\ddot{\vec{r}}'$$

durch Links-Multiplikation mit D^T erhalten wir hieraus wegen $D^T\vec{F} = \vec{F}'$, $D^T\ddot{\vec{s}} = \ddot{\vec{s}}'$, $D^T D\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}'$:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}' - m\ddot{\vec{s}}' - mD^T\ddot{D}\vec{r}' - 2mD^T\dot{D}\dot{\vec{r}}' \;;$$

$D^T \ddot{D} \vec{r}\,'$ und $D^T \dot{D} \dot{\vec{r}}\,'$ können durch momentanen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}\,'$ wie folgt dargestellt werden:

$$D^T \ddot{D}\, \vec{r}\,' = \vec{\omega}\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}}\,' \times \vec{r}\,'$$
$$D^T \dot{D}\, \dot{\vec{r}}\,' = \vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,'$$

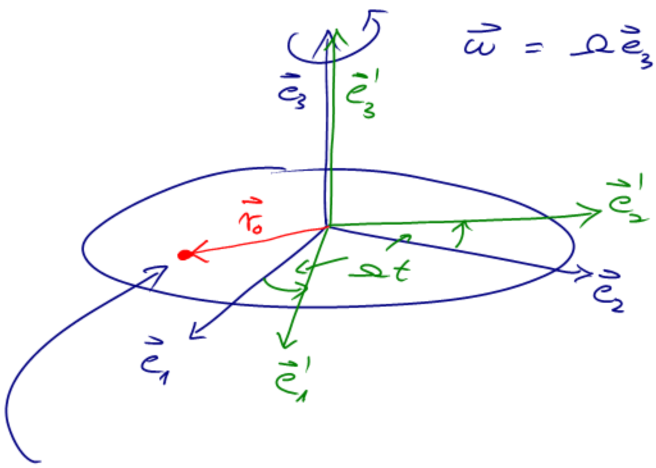
$$\rightarrow \boxed{m \ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F}\,' \underbrace{- m \ddot{\vec{s}}\,'}_{\substack{\text{Scheinkraft} \\ \text{aufgrund Beschl.} \\ \text{von } O'}} \underbrace{- m \vec{\omega}\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,')}_{\substack{\text{Zentrifugal-} \\ \text{kraft} \\ \vec{F}_Z'}} \overbrace{- m \dot{\vec{\omega}}\,' \times \vec{r}\,'}^{\text{Azimuthalkraft } \vec{F}_A'} \underbrace{- 2m \vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,'}_{\substack{\text{Corioliskraft} \\ \vec{F}_C}}}$$

↑ Newtonsche Bewegungsgl. im rotierenden und beschl. System K'

Elementares Beispiel:

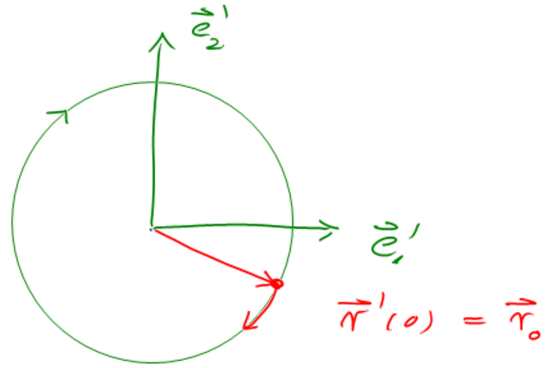
gleichmäßig rotierende Scheibe:

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{e}_3 = \Omega \vec{e}_3\,' = \vec{\omega}\,' = \text{konst.}$$



Massenpunkt der Masse m, ruht bzgl. K bei $\vec{r}_0$

Bewegung des MPs bzgl. K' ist offenbar gleichmäßige Kreisbewegung mit Winkelgeschw. $-\Omega$ und Radius $R = |\vec{r}_0|$:



aus Sicht des rotierenden Systems K' resultiert diese Kreisbewegung aus

1) Zentrifugalkraft : $\vec{F}_z\,' = -m\, \vec{\omega}\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,')$

$$= + m\, \Omega^2 R\, \vec{e}_r\,'$$

$\vec{\omega}\,' = \Omega\, \vec{e}_3$

$\vec{r}\,' \perp \vec{e}_3$, $|\vec{r}\,'| = R$

2) Coriolis kraft : $\vec{F}_c\,' = -2m\, \vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,'$

$$= 2m\, \Omega^2 R\, \vec{e}_3 \times \vec{e}_\varphi\,'$$

$\vec{\omega}\,' = \Omega\, \vec{e}_3$

$\dot{\vec{r}}\,' = -R\Omega\, \vec{e}_\varphi\,'$

$$= -2m\Omega^2 R\, \vec{e}_r\,'$$

$\rightsquigarrow \quad \vec{F}_z\,' + \vec{F}_c\,' = -m\,\Omega^2 R\, \vec{e}_r\,'$; dies ist genau die Zentripetalkraft, die den MP auf obige Kreisbahn bringt.