Ausblick: alternative Formulierung der Newtonschen Mechanik mittels <u>Wirkungsfunktional</u> und <u>Hamiltonschen Prinzip</u> erfordert etwas

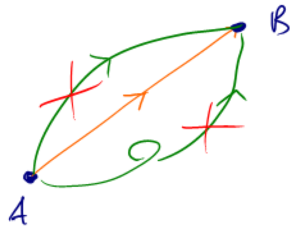
<u>Variationsrechnung</u>: <u>Funktional</u>, <u>Euler-Lagrange-Gleichungen</u>

Grundproblem: finde die extremalisierende <u>Funktion</u> f_0 eines <u>Funktionals</u> $J[f]$!

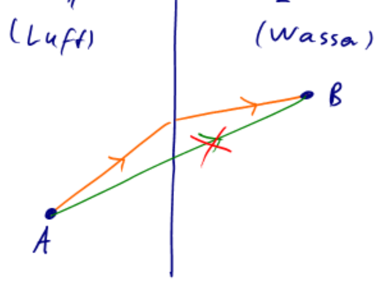
z.B. in der Anwendung des <u>Fermatschen Prinzips</u>:

$\boxed{\text{Ein Lichtstrahl von } A \text{ nach } B \text{ nimmt immer den Weg kürzester Laufzeit!}}$

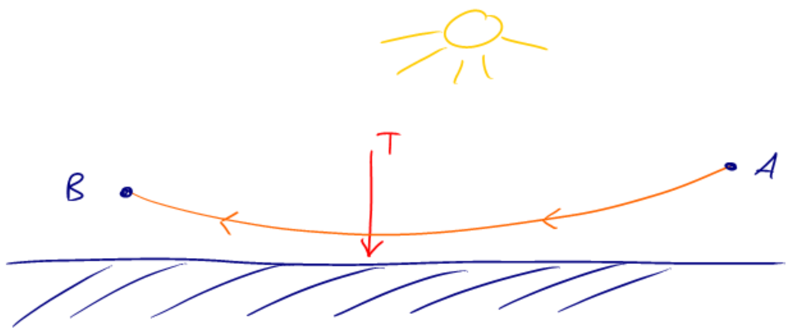
a) $c = \text{konst.}$



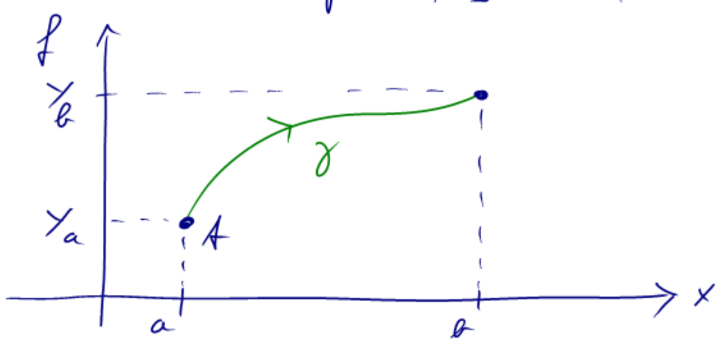
b)



c)



Wir beschreiben (ebenen) Weg γ des Lichtstrahls durch Graph einer Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$:



die Laufzeit des Lichts von A nach B längs γ ist

$$T = \int_\gamma \frac{dl}{c} = \int_a^b \frac{dx}{c} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} = \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)^{1/2} \Delta x$$

$$dl = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

d.h. die Laufzeit ist hier eine Funktion der Funktion f

$\rightarrow$ Funktional $\equiv$ Abbildung von Funktionen nach $\mathbb{R}$

$$J : \left(\begin{array}{l} \text{Menge der Fkt.} \\ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{mit } f(a) = y_a,\ f(b) = y_b \end{array} \right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto J[f] := \ldots$$

das Laufzeitfunktional $T[f]$ in unserem Beispiel ist also def. durch

a) $$T[f] = \int_a^b \frac{1}{c} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

konstante Lichtgeschwindigkeit

Funktionen mit $f(a) = y_a$, $f(b) = y_b$

Ist die Lichtgeschwindigkeit c abhängig von y gemäß

$$\frac{1}{c} = \frac{n(y)}{c_0} ,$$

So erhalten wir

b) $$T[f] = \frac{1}{c_0} \int_a^b n(f(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx \, .$$

$$\boxed{\text{Wie finden wir die Funktion } f_0 \text{ mit kürzester Laufzeit } T[f] \text{ ?}}$$

wir verallgemeinern das Problem auf Funktionale der Form

$$J[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x)) \, dx \, ,$$

wobei $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f, f') \mapsto L(f, f')$

die Lagrange-Funktion des Funktionals J ist;

in a): $L(\cancel{f}, f') = \frac{1}{c} \sqrt{1 + f'^2}$

in b): $L(f, f') = \frac{1}{c_0} n(f) \sqrt{1 + f'^2}$

Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums von J bei f_0

f_0 sei (lokales) Minimum von $J[f]$

$\rightarrow$ jede Variation von $f_0(x)$ um $\eta(x)$ nach

$$f(x) = f_0(x) + \varepsilon \eta(x) \, , \quad \text{wobei } \eta(a) = \eta(b) = 0 \, ,$$

ergibt für jedes $\varepsilon \neq 0$ einen größeren Wert:

$$J[f_0 + \varepsilon\eta] > J[f_0]$$

d.h. $\varepsilon \mapsto J[f_0 + \varepsilon\eta]$ hat Minimum bei $\varepsilon = 0$

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} J[f_0 + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L\left(f_0(x) + \varepsilon\eta(x),\, f_0'(x) + \varepsilon\eta'(x)\right) dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}\left(f_0(x), f_0'(x)\right)\eta(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\left(f_0(x), f_0'(x)\right)\eta'(x)\,dx}_{\text{// P.I.}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\left(f_0(x), f_0'(x)\right)\eta(x)\Big|_a^b}_{\overset{\shortparallel}{0},\ \text{da } \eta(b) = \eta(a) = 0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\left(f_0(x), f'(x)\right)\eta(x)\,dx$$

d.h. $$0 \overset{!}{=} \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial f}\left(f_0(x), f_0'(x)\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\left(f_0(x), f_0'(x)\right) \right\} \eta(x)\,dx$$

da dies für <u>alle</u> Variationen $\eta(x)$ gilt, muss der Term $\{\ldots\}$ verschwinden;

d.h. $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial f}\left(f_0(x), f_0'(x)\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f}\left(f_0(x), f_0'(x)\right) = 0}$$

<u>Euler-Lagrange-Gleichung</u>, jede Fkt f_0, die ein

Minimum (oder Maximum) des Funktionals sein möchte, muss diese Gleichung erfüllen!

Zurück zum Fermatschen Prinzip und dem Weg kürzester Laufzeit:

der gesuchte Weg γ_0 als Graph der Fkt. f_0 minimiert

$$T[f] = \int_a^b \frac{dx}{c} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

und erfüllt deshalb die

Euler-Lagr.-Gl. zur Lagr.-Fkt $L(\cancel{f}, f') = \frac{1}{c}\sqrt{1 + f'^2}$;

wegen $\partial L / \partial f = 0$ lautet diese hier

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} ;$$

d.h. $f'(x) / \sqrt{1 + f'(x)^2}$ ist konstant und damit auch

$f'(x) \longrightarrow$ d.h. $\boxed{f(x) = a_1 + a_2 x}$ (*) mit a_1 und a_2

bestimmt durch Randbedingungen $f(a) = y_a$, $f(b) = y_b$;

hier interessiert uns aber nur die Erkenntnis, dass nach (*) das Licht einen geraden Weg von A nach B nimmt.