Äquivalente Formulierung der Newtonschen Mechanik mittels Hamiltonschem Stationaritätsprinzip

übliche Notationen in der Mechanik:

- $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $q : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$

- Funktional $\longrightarrow$ Wirkungsfunktional (Wirkung)

$$J[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x))\,dx \longrightarrow S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))\,dt$$

Lagrange-Funktion

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f, f') \mapsto L(f, f') = \dots$$

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q}) = \dots$$

Euler-Lagrange-Gleichungen

f_0 Minimum/Maximum / "Sattelpkt." von $J[f]$

$\equiv f_0$ stationäre Fkt. von $J[f]$ $\longrightarrow$ q_0 stationäre Bahn von $S[q]$

$\iff$ $\qquad\qquad$ $\iff$

f_0 genügt $\qquad\qquad$ q_0 genügt

$$\frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x)) = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t)) = 0$$

kurz

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

für alle $i = 1, 2, \dots, n$

Newtons Mechanik und Hamiltons Stationaritätsprinzip am Beispiel eines Teilchens (Masse m) im kons. Kraftfeld $\vec{F} = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$

Newton: $\boxed{\text{Bahn des Teilchens genügt BWGL } m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \; !}$

Hamilton: Bahn des Teilchens ist stationäre Funktion $q_0(t) \equiv \vec{r}(t)$ der Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))\, dt$$

zur Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - U(q)$$

$\mathbb{R}^3 \ni q = (q_1, q_2, q_3)$

diese Aussagen sind äquivalent, da $q_0(t) = \vec{r}(t)$ als stationäre Fkt. von $S[q]$ die ELGen erfüllt:

$$\frac{\partial L(q_0(t), \dot{q}_0(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t)) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

und diese wegen $\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U(q)}{\partial q_i}$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{q}_i$

offenbar äquivalent zur Newtonschen BWGL

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -\operatorname{grad} U(\vec{r}(t))$$

ist.

analog findet man für ein allg. konservatives N Teilchen System:

Hamiltonsches Stationaritätsprinzip

Die Newtonschen Bahnen $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ eines N-Teilchen-Systems mit vorgegebenen Positionen bei Zeiten t_1 und t_2 bilden genau die stationäre Fkt. $q(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$ der Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))\, dt$$

mit Lagrange-Fkt. $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$.

kinetische und potenzielle Energie

Koordinatenwechsel:

$$\vec{r} \underset{\phi^{-1}}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} q = \phi(\vec{r}) \quad ;$$

Bahn $\vec{r}(t)$ und deren transf. Bahn $q(t) = \phi(\vec{r}(t))$ ergeben per def. dieselbe Wirkung:

$$S[r] \overset{!}{=} S_q[q]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{L_q(q(t), \dot{q}(t))}\, dt$$

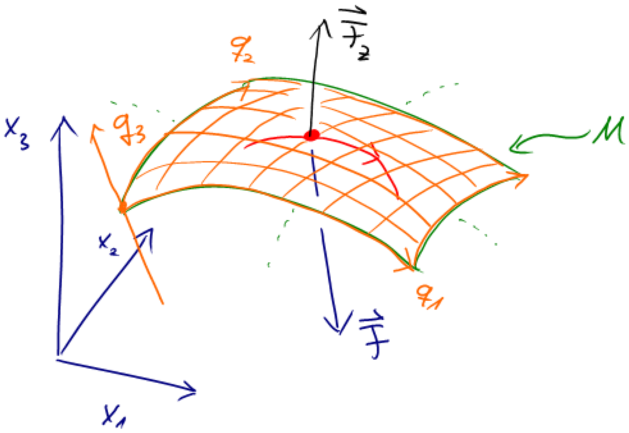
$$L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \overset{!}{=} L_q(q(t), \dot{q}(t))$$

$\longrightarrow$ Stationaritätsprinzip und damit auch Euler-Lagrange-Gleichungen gelten in __allen__ Koordinaten !

diese Eigenschaft ist besonders vorteilhaft bei

Bewegung unter Zwangsbedingungen

zuerst am Beispiel eines Teilchens auf __Zwangsfläche__ M unter Kraft $\vec{F}$:



__Zwangskraft__ $\vec{F}_z$:
- hält MP auf Zwangsfläche
- $\perp$ M

mittels Stat.-prinzip und ELGen Behandlung des Problems sehr einfach, wenn __geeignete__ Koordinaten benutzt werden:

hier: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow q = (q_1, q_2, q_3)$ derart,

dass $\boxed{q \in M \iff q_3 = 0}$ (vgl. Skizze)

gesuchte Bahn $q(t)$ liegt in M, weshalb $q_3(t) = 0$ für alle t $\longrightarrow$ benötigen $L(q, \dot{q})$ nur für $q_3(t) = 0$, $\dot{q}_3(t) = 0$

→ beim Lösen der ELG setzen wir ebenfalls $q_3(t) = 0$

→ <u>Rezept</u>: <u>Lagrangesche Mechanik</u>, evtl. unter <u>Zwangsbedingungen</u>

(i) wähle geeignete <u>unabhängige</u> Koordinaten

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$$

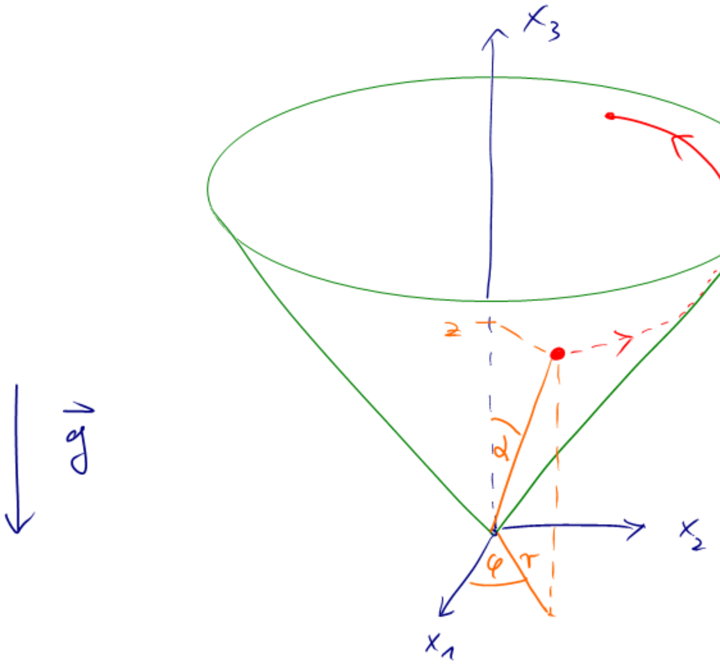
(ii) bestimme $L = T - V$ in den gewählten Koordinaten

(iii) bestimme anhand $L(q, \dot{q})$ ELGen in q

→ (iv) Bahnen $q(t)$ als Lösungen der ELGen

<u>Beispiele</u>

1) <u>Teilchen auf Kegelmantel unter Schwerkraft</u>



(i) $q \overset{!}{=} (r, \varphi)$

d.h. $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ u r \end{pmatrix}$

mit $u = \frac{z}{r} = \cot\alpha$

$$\rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ u \end{pmatrix}}_{\overset{!!}{=}\ \vec{a}} \dot{r} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\ \vec{e}_\varphi} r\dot{\varphi}$$

wegen $|\vec{a}|^2 = 1+u^2$, $|\vec{e}_\varphi| = 1$ und $\vec{a} \perp \vec{e}_\varphi$ (d.h. $\langle \vec{a}, \vec{e}_\varphi \rangle = 0$)

folgt
$$|\dot{\vec{r}}|^2 = (1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$\rightarrow$ (iii)
$$T = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2}\left((1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$
$$U \overset{!}{=} mgx_3 = mgur$$

d.h.
$$\boxed{L(r, \varphi, \cancel{\dot{r}}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left((1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgur}$$

(iv) ELG für φ:
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

somit
$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad \text{d.h.}$$

(*) $\boxed{\ell := mr^2\dot{\varphi}}$ ist Erhaltungsgröße!

ELG für r:
$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\varphi}^2 r - mgu$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(1+u^2)\dot{r}$$
$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

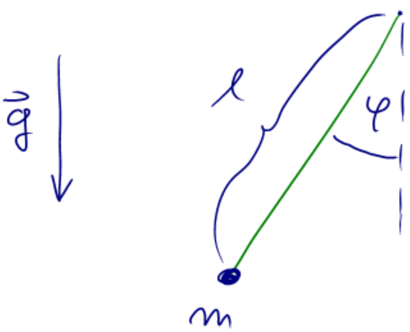
$$\rightarrow \quad m(1+u^2)\ddot{r} \overset{!}{=} m\dot{\varphi}^2 r - mgu$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{\ell^2}{mr^3} - mgu$$
$$= -\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{\ell^2}{2mr^2} + mgur\right)}_{=:\ U_{\mathrm{eff}}(r)}$$

$\rightarrow$ $r(t)$ genügt BWGL eines MPs der Masse $m(1+u^2)$ im Potential $U_{eff}(r)$:

$$m(1+u^2)\,\ddot{r}(t) = -\frac{\partial}{\partial r} U_{eff}(r(t))$$

.

2) Mathematisches Pendel



(i) $q \overset{!}{=} \varphi$

(ii) $T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$

$U = -mgl\cos\varphi$

$\rightarrow$ $L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$

$\rightarrow$ (iii) · $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$

· $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$

$\rightarrow$ $\frac{d}{dt}$

$$\cancel{m}\,\cancel{l^2}\,\ddot{\varphi}(t) \overset{!}{=} -\cancel{m}\,\frac{g\cancel{l}}{l}\sin\varphi(t)$$

d.h. $$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t)}$$

Für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$: $\sin\varphi = \varphi$,

d.h. $\ddot{\varphi}(t) = -g/l\ \varphi(t)$

$\rightarrow$ allg. Lösung: $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t - \alpha)$,

wobei $\omega = \sqrt{g/l}$.