Grundlagen der Hamiltonschen Mechanik

Lagrangesche Mechanik: Bahn $q(t)$ genügt ELGen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t))$$

$\hat{=}$ N DGLen 2. Ordnung.

Hamiltons Idee: Zustand $x(t) = (q(t), p(t))$ genügt

$2N$ DGLen 1. Ordnung; etwa:

$$\begin{cases} p_i(t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t)) \\ \dot{p}_i(t) = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t)) \end{cases}$$

sehr einfaches Beispiel: $\ddot{r} = f(r)$, 1 DGL 2. Ordnung

$x(t) = (r(t), v(t))$ sei Lösung von

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= f(r) \end{aligned}\right\} \text{ 2 DGLen 1. Ordnung}$$

mit $x(0) = (r_0, v_0)$;

$\longrightarrow$ $r(t)$ ist Lösung der DGL $\ddot{r} = f(r)$!

(denn $\ddot{r}(t) = \dot{v}(t) = f(r)$)

konkret:

Hamiltonsche Beschreibung eines Systems beschr. durch

- N Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{R}^n$
- Lagrange-Fkt $L(q, \dot{q})$

benötigt

a) Transformation $(q, \dot{q}) \longmapsto (q, p)$

$\dot{q}$: Geschwindigkeiten; p: Impulse gemäß $\boxed{p_i(q,\dot q) = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q,\dot q)}$

Umkehrung

$$(q,p) \longmapsto (q, \dot q(q,p))$$

b) Hamilton-Funktion

$$\boxed{H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \dot q_i(q,p)\, p_i - L(q, \dot q(q,p))}$$

dann gilt$^{(*)}$: Zustand $x(t) = (q(t), p(t))$ genügt Hamiltonschen Gleichungen:

$$\boxed{\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

2N DGLen 1. Ordnung

zu $(*)$: wir zeigen: $q(t)$ Lsg. der ELGen

$\overset{!}{\Longrightarrow}$ $x(t) = (q(t), p(q(t), \dot q(t)))$ Lsg der Hamiltonschen Glen.

(wegen Eindeutigkeit der Lsgen gilt dann auch „$\Leftarrow$")

1) $$\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t), p(q(t), \dot q(t))) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \dot q_i p_i - L\right)$$

$$= \left(\sum_i \frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} p_i\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{=p_i} \frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$= -\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{=p_j} = -\dot p_j \quad \checkmark$$

$q(t)$ Lsg. der ELGen

2) $$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_i \dot q_i p_i - L\right) = \dot q_j + \sum_i \left(\frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j} p_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{= p_i} \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j}\right)$$

$$= \dot q_j \quad \checkmark$$

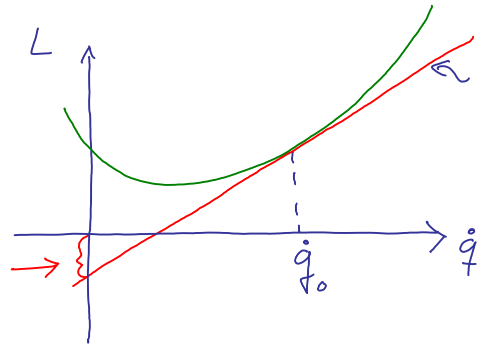
Info: Trafo $L(\dot q) \longrightarrow H(p) = \dot q(p)\, p - L(\dot q(p))$

mit $p(\dot q) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}(\dot q)$ $(\rightarrow \dot q(p))$ ist Legendre-Transformation (von L auf H);

stellt sicher, dass
$$\dot q(p) \overset{!}{=} \frac{\partial H}{\partial p}(p) \qquad (1)$$

⌈ genau wie oben: $\frac{\partial H}{\partial p}(p(\dot q)) = \cancel{\frac{\partial \dot q}{\partial p}} p + \dot q - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{= p} \cancel{\frac{\partial \dot q}{\partial p}} = \dot q$ ✓ ⌋

geometrisch:



Steigung $\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big|_{\dot q_0} \overset{!}{=} p_0$

$-H(p_0) \overset{!}{=} L(\dot q_0) - p_0 \dot q_0$

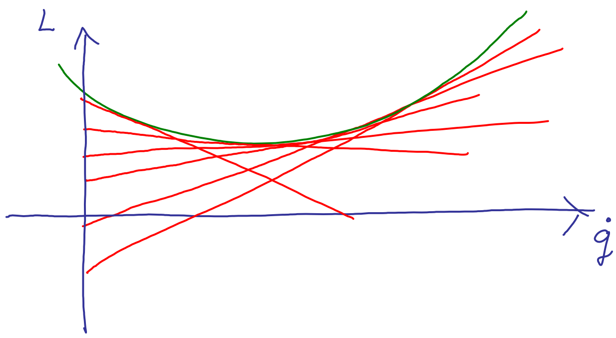
Legendre-Trafo von $H(p)$ (als Legendre-transformierte von $L(\dot q)$) auf $K(v)$:

$$v(p) = \frac{\partial H}{\partial p}(p) \overset{(1)}{=} \dot q(p) \quad , \text{ mit Umkehrung } p(v)$$

$$\rightarrow K(v) = p(v)\, v - H(p(v))$$
$$= p(v)\, v - \underbrace{\dot q(p(v))}_{= v}\, p(v) + L(\underbrace{\dot q(p(v))}_{= v})$$
$$= L(v) \;!$$

d. h. die Legendre-Trafo ist selbstinvers !

⌈ zumindest die Umkehrbarkeit der Legendre-Trafo ist geometrisch einsehbar:



Graph von L (grüne Kurve) ist die Einhüllende aller Strahlen $(\dot q, p\dot q - H(p))$, $p \in \mathbb{R}$. ⌋

Beispiel: Teilchen mit Koordinaten $q = \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ im Kraftfeld $F_i(q) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}(q)$:

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q)$$

$$\rightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \quad , \quad \text{d.h.} \quad \dot{q}_i(p) = p_i/m$$

also $\dot{q}(p) = p/m$

$$\rightarrow \quad H(q,p) = \sum \dot{q}_i(p)\, p_i - L(q, \dot{q}(p)) = \frac{p^2}{2m} + U(q) .$$

$$\rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i/m \quad \checkmark$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}(q) = F_i(q) \quad \checkmark$$

Hamiltonsches Vektorfeld:

$$V: \quad \Gamma \; (\equiv \mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow T\Gamma \; (\equiv \mathbb{R}^{2N})$$

$$x = (q,p) \longmapsto V(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_N} \right)_x$$

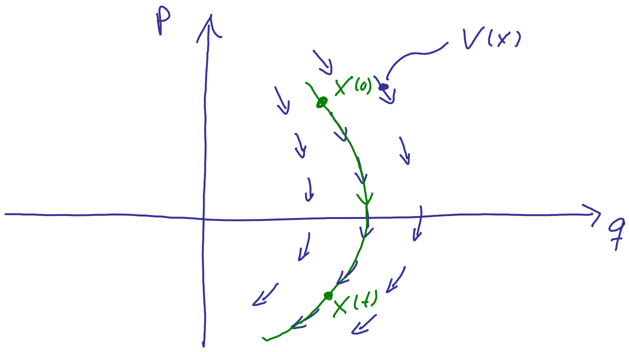
$$\left(\text{kurz:} \quad V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}_x \right)$$

damit schreiben sich Hamiltonsche Gleichungen als

$$\boxed{\dot{x}(t) = V(x(t))}$$

d.h. die Phasenraumbahnen $x(t)$ sind die Integralkurven des Hamilt. Vektorfeldes V !

geometrisch:



Hamiltonsche Vf generiert den <u>Hamiltonschen Fluss</u>:

Abbildung $\phi : \Gamma \times \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$

$(x,t) \longmapsto \phi_t(x)$

mit $\phi_t(x)$ so, dass für bel. Phasenraumbahnen $x(t)$:

$$\boxed{\phi_t(x(0)) \overset{!}{=} x(t)}$$

oder äquivalent:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \dot{\phi}_t(x) \overset{!}{=} V(\phi_t(x)) \\ \text{und} & \phi_0(x) = x \end{array}}$$ für alle x, t

offenbar gilt:

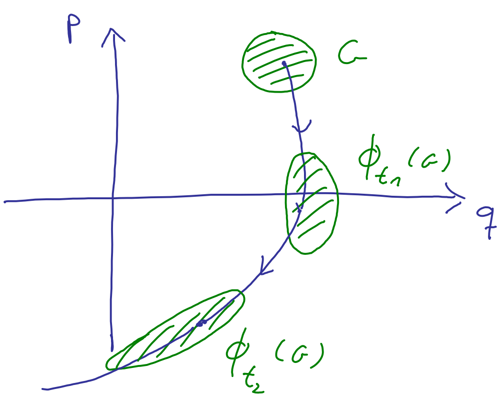
$$\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1} = \phi_{t_1+t_2}$$

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$$

<u>Satz von Liouville</u>

Der Hamiltonsche Fluss ist <u>volumenerhaltend</u> (d.h. <u>inkompressibel</u>):

$$\mathrm{Vol}(G) \overset{!}{=} \mathrm{Vol}(\phi_t(G))$$ für bel. Gebiet $G \subset \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$

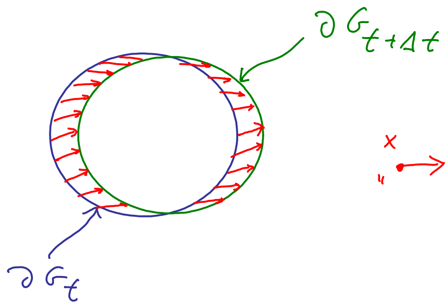


$$\left[\mathrm{Vol}(G) := \int_G \underbrace{d^n q \, d^n p}_{\overset{!!}{d\Gamma}} \; 1 \right]$$

<u>Zum Beweis</u>: Erhaltung des Phasenraumvolumens ist Folge der <u>Divergenzfreiheit</u> des Hamilt. Vf'es:

$$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{N} \Bigg(\underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial q_i}}_{\partial^2 H / \partial p_i \partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial V_{i+N}}{\partial p_i}}_{= -\partial^2 H / \partial p_i \partial q_i} \Bigg) = 0 \; !$$

dies „sieht" man leicht geometrisch ein:



$G_t := \phi_t(G)$

„$\overset{x}{\bullet}\!\rightarrow$" $= \vec{V}(x)\,\Delta t$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Vol}(G_{t+\Delta t}) - \mathrm{Vol}(G_t) = \int_{\partial G_t} \Delta t\, \vec{V}\cdot d\vec{f}$$

$$\underset{\text{Gauß / Stokes}}{=} \Delta t \int_{G_t} \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{V}}_{=0}\, d\Gamma = 0 \quad !$$

<u>genauere Rechnung</u> mittels <u>Transformationssatz</u> der Analysis:

$\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffbar und umkehrbar

$$\rightarrow \quad \int_{\phi(G)} d^n x\, f(x) = \int_G d^n x\, f\circ\phi(x)\, |\det \underbrace{J\phi(x)}|$$

Jacobi-Matrix von ϕ in x

$$\left(J\phi(x)\right)_{ij} = \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j}$$

damit erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(G_t)\Big|_{t_0} = \frac{d}{dt}\int_{\phi_t(G_{t_0})} d^{2N}x\; 1 \,\Big|_{t=0} \overset{T.S.}{=} \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_{G_{t_0}} d^{2N}x\, |\det J\phi_t(x)|$$

$$= \pm \int_{G_{t_0}} d^{2N}x\, \frac{d}{dt}\det J\phi_t(x)\Big|_{t=0}$$

Berechnung von $\frac{d}{dt}\det J\phi_t(x)\Big|_{t=0}$:

1) $\det(A+\varepsilon B) = \det A(\mathbb{1}+\varepsilon A^{-1}B) = \det A \det(\mathbb{1}+\varepsilon A^{-1}B)$

$$\underset{|\varepsilon|\ll 1}{=} \det A\,(1+\varepsilon\, \mathrm{tr}\, A^{-1}B)$$

($\mathrm{tr}\, M := \sum_i M_{ii}$ „Spur von M"

2) $\frac{d}{dt} \det A(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\det \left(A(t) + \varepsilon \dot{A}(t) \right) - \det A(t) \right)$

$\overset{1)}{=} \det A \cdot \operatorname{tr} A^{-1} \dot{A}$

3) $J\phi_0(x) = Jx = \mathbb{1}$, ϕ_t Integralkurve von V

$\frac{d}{dt} J\phi_t(x) \Big|_{t=0} = J\dot{\phi}_t(x) \Big|_{t=0} = JV(x) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) \right)_{ij}$

$\overset{2)3)}{\longrightarrow} \frac{d}{dt} \det J\phi_t(x) \Big|_{t=0} = \operatorname{tr} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) \right)_{ij} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x) = \operatorname{div} \vec{V}(x)$

$= 0$!

also $\frac{d}{dt} \operatorname{Vol} G_t = 0$ ∎