eine bemerkenswerte Folgerung aus dem S.v. Liouville ist der

Poincaresche Wiederkehrsatz

In jedem (beliebig kleinen!) Phasenraumgebiet G eines autonomen, beschränkten Hamiltonschen Systems gibt es (überabzählbar viele!) Zustände, die nach hinreichend langer Zeit in G zurückgekehrt sind.

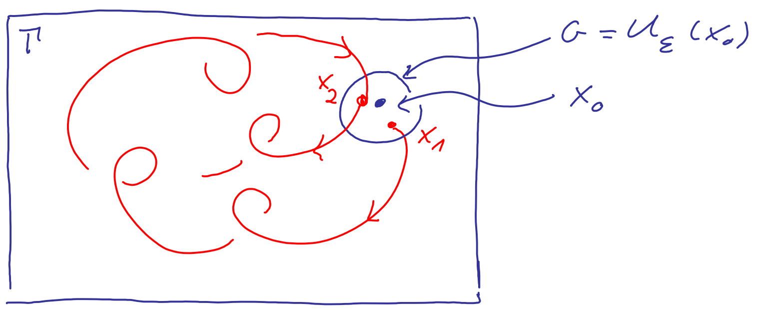
System autonom $:\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

System beschränkt $:\Longleftrightarrow \quad H(q,p)$ divergiert falls q oder $p \to \infty$,

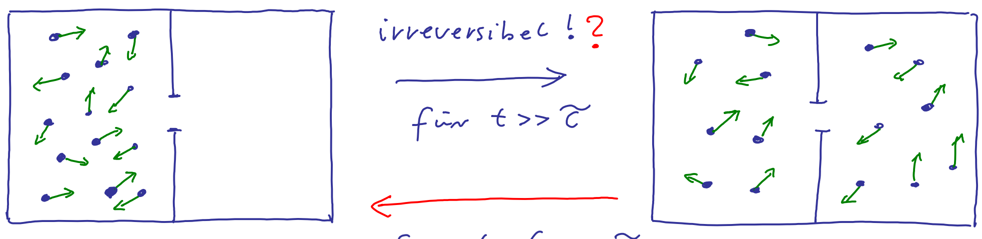
d.h. $\quad \Gamma_E := \{ x \in \Gamma \mid H(x) \leq E \}$ ist für alle E eine beschränkte Teilmenge von Γ;

insbesondere $\mathrm{Vol}(\Gamma_E) < \infty$.

etwa:



Gas im Behälter:



$x_0 \approx x_1 \approx x_2$

thermodynamisches Gleichgewicht

Poincare: nach hinreichend langer Zeit Gasteilchen wieder in der linken Seite des Behälters

Wiederkehrsatz damit ein Problem bei der mikroskopischen Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

(Boltzmann vs. Zermelo)

Auflösung der Kontroverse (schon durch Boltzmann):

für <u>makroskopische</u> Systeme $t_W \ggg$ Alter des Universums!

(Abschätzung von t_W innerhalb einfachen Modells in den Übungen.)

Beweis des Wiederkehrsatzes mittels S. v. Liouville:

wähle Zeit $T > 0$ beliebig und setze für $m \in \mathbb{N}$

$G_m := \phi_{mT}(G)$; also $G_0 = G$

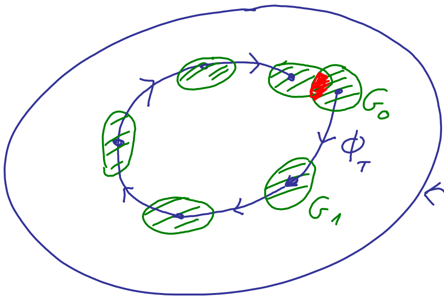
$G_1 = \phi_T G$

$G_2 = \phi_T G_1$

$\vdots$

$G_{m+1} = \phi_T G_m$

$\vdots$



$\Gamma_E = \{x \in \Gamma \mid H(x) \leq E\}$

mit $E = \max_{G} H$

alle G_m sind nach Liouville vom gleichen Volumen $\mathrm{Vol}(G)$ und liegen in Γ_E; wegen $\mathrm{Vol}\,\Gamma_E < \infty$ gibt es daher $k \leq l$ mit $G_k \cap G_l \neq 0$;

folglich auch $\emptyset \neq \phi_{-kT}(G_k \cap G_l) = G_0 \cap G_{l-k} =: \mathcal{U}$;

ein $x \in \phi^{-1}_{(l-k)T}\, \mathcal{U} \subset G$ ist demnach nach Zeit $(l-k)T$ wieder in G zurückgekehrt. ■

<u>Poisson-Klammer</u>

zeitliche Änderung einer Phasenraumvariablen $A: \underset{\text{Zeit}}{\Gamma \times \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

längs Phasenraumbahn $x(t)$:

$$A(t) \equiv A(x(t), t)$$

$$\to \frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

<u>Poisson-Klammer</u> zweier Phasenraumvariable B, C sei

$$\{B, C\} := \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}$$

dann offenbar

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t}}$$

<u>Eigenschaften der Poisson-Klammer</u>

- $\{A, B\} = -\{B, A\}$, insbes. $\{A, A\} = 0$
- $\{\lambda A, B\} = \lambda\{A, B\}$
- $\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}$
- $\{A B, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\} B$
- $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$
- $\{A, f(B)\} = f'(B)\{A, B\}$ (f analytisch, d.h. $f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^\ell$)
- Jacobi-Identität:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

Offenbar gilt:

$$A \text{ Erhaltungsgröße} \iff \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Wegen $\{H, H\} = 0$ ist in einem autonomen System damit H <u>immer</u> Erhaltungsgröße, genannt „<u>Energie</u>" !

<u>Satz</u>

Sind A, B Erhaltungsgrößen, so auch $\{A, B\}$.

<u>Beweis</u>:

$$\frac{d}{dt}\{A, B\} = \{H, \{A, B\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{A, B\}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobi-Id, Produktregel}}}{=} -\{A, \{B, H\}\} - \{B, \{H, A\}\} + \{\frac{\partial A}{\partial t}, B\} + \{A, \frac{\partial B}{\partial t}\}$$

$$= \left\{ A, \underbrace{\left\{ H, B \right\} + \frac{\partial B}{\partial t}}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ da } B \text{ E.-G.}} \right\} - \left\{ B, \underbrace{\left\{ H, A \right\} + \frac{\partial A}{\partial t}}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ da } A \text{ E.-G.}} \right\} = 0 \; .$$

<u>Beispiel</u>: L_1, L_2, L_3 seien die Komponenten des Gesamtdrehimpulses eines Systems.

Wegen $\{ L_1, L_2 \} = L_3$ ist dann in Systemen mit erhaltenden L_1, L_2 auch immer L_3 erhaltend.