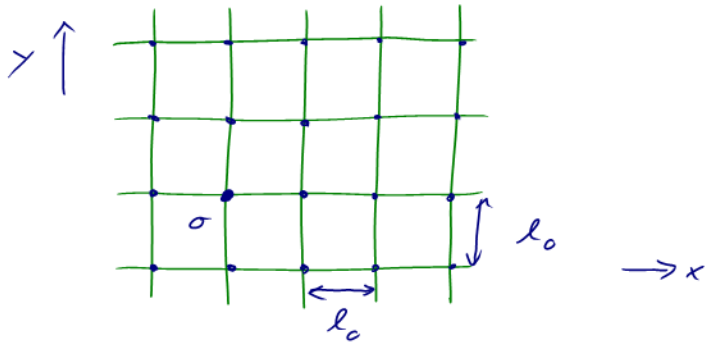
Raumzeit-Koordinatensysteme und Lorentztransformation

Erfassung der Koordinaten $(\underset{\text{Zeit}}{t}, \underset{\text{Ort}}{\vec{r}})$ eines Ereignisses benötigt

Raumzeit-Koordinatensystem bzgl. eines Inertialsystems K :

1) System von ruhenden (bzgl. K) Maßstäben

$\longrightarrow$ Koordinatengitter :



$\longrightarrow$ Ortskoordinaten $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2) System synchronisierter (bzgl. K) Uhren :

Synchronisation z.B. durch Lichtblitz bei $(0, \vec{0})$

$\longrightarrow$ Empfangszeit $t_{\vec{r}}$ einer Uhr mit Ortskoord. $\vec{r}$:

$$t_{\vec{r}} := \frac{|\vec{r}|}{c}$$

Lorentztransformation

Problem : gegeben zwei Inertialsysteme K, K', wie transformieren sich entsprechende Koordinaten $(t, \vec{r})$ nach $(t', \vec{r}\,')$ eines Ereignisses ?

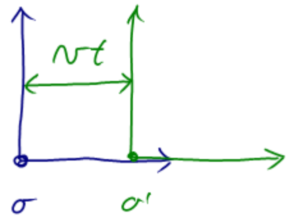
formal durch Abb. $\Lambda : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Wie lautet Λ ?

Wir spezifieren K' durch $\vec{\sigma\sigma'} = vt\,\vec{e}_x$ und
$$\vec{e}_x = \vec{e}_x{}' \quad \vec{e}_y = \vec{e}_y{}' \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z{}'$$

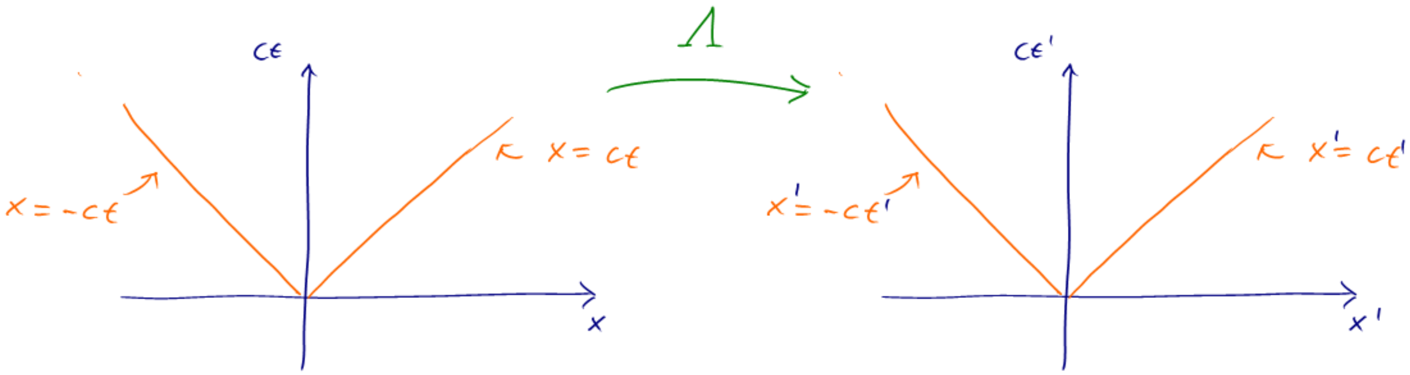


und bestimmen Λ aus folgenden Eigenschaften:

1) Λ linear (wegen Homogenität von Raum und Zeit)

2) $y' = y$; $x' = x$

3) „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit":



d.h.
$$\boxed{(ct)^2 - x^2 \overset{!}{=} (ct')^2 - x'^2} \qquad (*)$$

4) Zeitdilation:

→ Weltlinie eines in σ ruhenden Teilchens, $\begin{pmatrix} ct \\ \vec{0} \end{pmatrix}$,
transformiert sich auf
$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\, t \\ -v \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, t\ \vec{e}_x \end{pmatrix}} \qquad (**)$$

aus 1) und 2) folgt
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & \\ & \lambda \\ & \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit noch zu bestimmender 2×2 Matrix λ

Konstanz der Lichtgeschw. mit (*) bedeutet:
$$\begin{pmatrix} \tau' \\ x' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix} \quad \text{derart, dass} \quad \tau'^2 - x'^2 \overset{!}{=} \tau^2 - x^2$$

[erinnert and 2D Drehung:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{derart, dass} \quad x'^2 + y'^2 \overset{!}{=} x^2 + y^2 \qquad (*)'$$

$\rightarrow$ allg. Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

mit Bedingung (*') wegen $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ erfüllt]

wegen „$-$" in (*) hier allg. λ gegeben durch
$$\lambda \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

(mit $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ überprüft man leicht (*) .)

Hinweis: wegen $\cosh\alpha = \cos(i\alpha)$ und $i\sinh\alpha = \sin(i\alpha)$ kann man λ als Drehung um "imaginären" Winkel $i\alpha$ auffassen.

Bestimmung von α durch 4):
$$\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \tau \\ -\frac{v}{c}\tau \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad ; \quad \sinh\alpha = \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

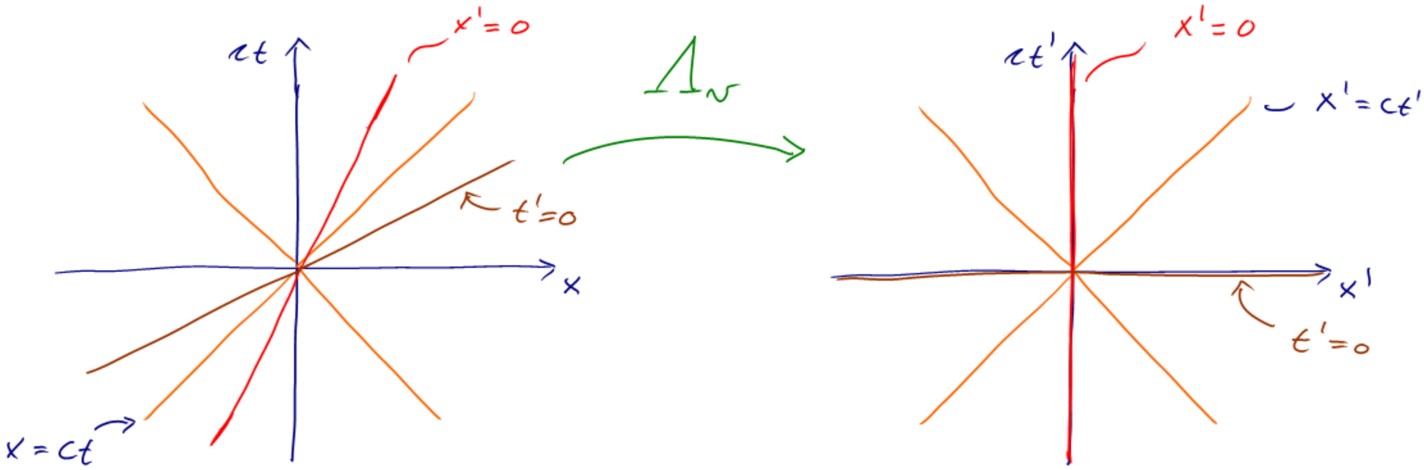
somit erhalten wir spezielle Lorentztransformation Λ_v zu sog. Lorentz-Boost $\overrightarrow{OO'} = v t \vec{e}_x$:

$$\boxed{\Lambda_v = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & & \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}$$

wobei $\quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

<u>explizit</u> :

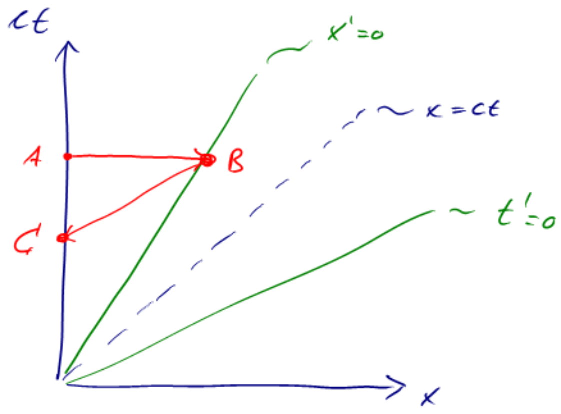
$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(x - vt\right) \\ y' &= y \quad , \quad z' = z \end{aligned}}$$



Lorentztransformation + Kausalität impliziert:

Signale können <u>nicht</u> mit Überlichtgeschwindigkeit $v_s > c$ übermittelt werden

betrachte dazu der Einfachheit halber $v_s = \infty$:



A: im K ruhenden Beobachter I sendet Signal zur Zeit t_A nach gl.-gerade. beweg. Beobachter II, ruhend in K'

B: Beobachter II empfängt Signal von I und sendet zweites Signal

C: Beobachter I empfängt Signal von II zur Zeit $t_C < t_A$!

aber: Signale aus der Zukunft <u>unverträglich</u> mit gängigen Konzepten von Kausalität !