Minkowski-Raum, Pseudo-Skalarprodukt, Vierer-Vektor, Eigenzeit

Erinnerung: euklidischer Raum: z.B. $\mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\vec{a}, \vec{b} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

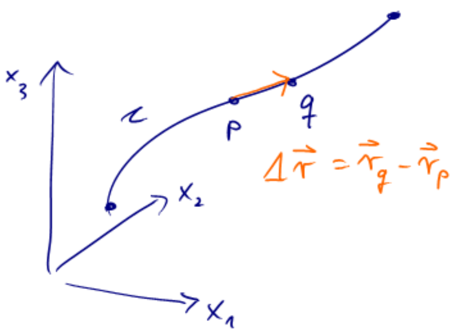
wobei $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\rightarrow$ euklidische Geometrie:

Betrag/Norm: $|\vec{a}|^2 := \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \sum_i a_i^2$

Orthogonalität: $\vec{a} \perp \vec{b} :\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

$\rightarrow$ Linienelementlänge:



$$\Delta l^2 = |\Delta \vec{r}|^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$$

$$\text{„} dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \text{“}$$

$\rightarrow$ Länge der Kurve c: $\quad l = \int_c dl = \dots$

Minkowski-Raum $\equiv \mathbb{R}^4$ mit Pseudo-Skalarprodukt

$$(\ ,\ ) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$
$$u, v \mapsto (u, v)$$

wobei $\boxed{(u,v) := u_0 v_0 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3}$

$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

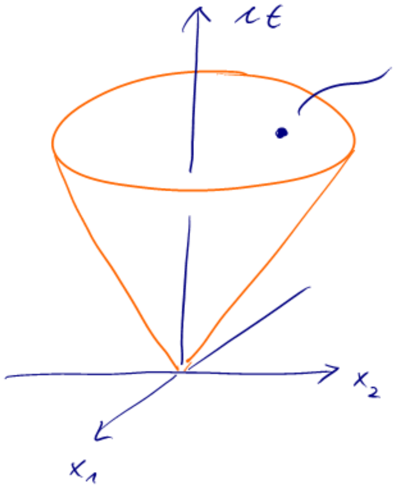
Normquadrat: $u^2 := (u, u)$

beachte: $u^2 < 0$ möglich!

physikalische Relevanz:

$$x_A = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ seien Koordinaten bzgl. K eines Ereignisses A auf

Lichtkegel:



d.h. genau $ct = |\vec{r}|$ bzw $\overbrace{(ct)^2 - |\vec{r}|^2}^{=(x,x) = x^2} = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Ereignis } A \text{ auf Lichtkegel} \iff x_A^2 = 0}$

beachte: Liegt A auf Lichtkegel bzgl. IS K so auch in allen anderen ISen K'! (Konstanz der Lichtg.)

$$\rightarrow \quad x_A^2 = 0 \overset{!}{\iff} x_A'^2 = 0$$

Koordinaten von A bzgl. K'

da $x_A' = \Lambda x_A$ mit geeigneter Lorentztransformation schließen wir auf die <u>Invarianz des Pseudo-Skalarprodukts unter Lorentztransformation</u>:

$$\boxed{(u, v) \stackrel{!}{=} (\Lambda u, \Lambda v)} \quad \text{für bel. } u, v, \Lambda$$

Erinnerung: das euklidische Skalarprodukt ist invariant unter Drehung D:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \stackrel{!}{=} \langle D\vec{a}, D\vec{b} \rangle$$

Definition: ein Vierer-Vektor u transformiert sich per def. bei Wechsel des Bezugssystems von K auf K' unter Lorentztransformation

$$u \longrightarrow u' = \Lambda u$$

- Koordinaten $X = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ somit offenbar Vierer-Vektor
- u, v Vierer-Vektoren $\longrightarrow$ $u+v$, $u-v$, $\underset{\in\mathbb{R}}{\lambda} v$ Vierer-Vektoren

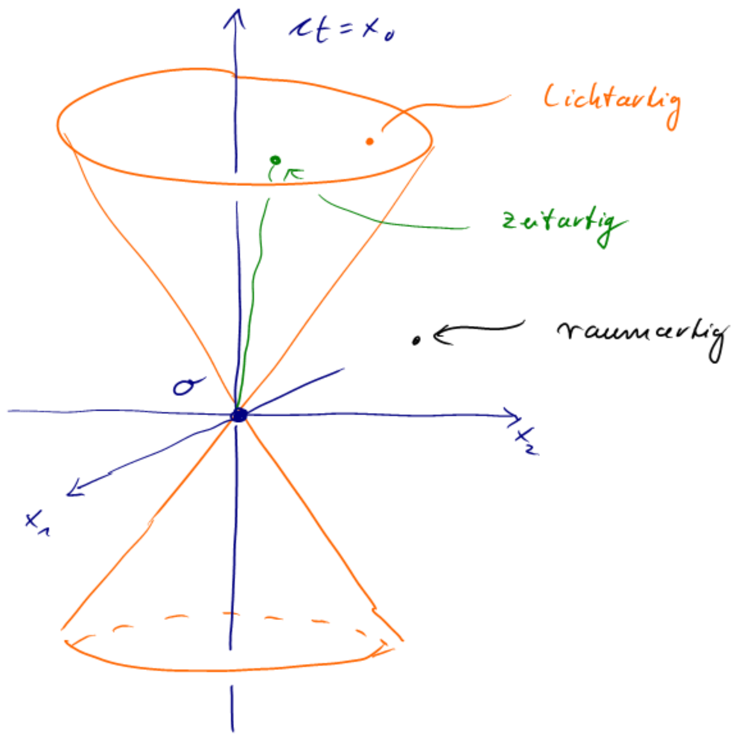
Definition: ein Vierer-Vektor u heißt

lichtartig g.d.w. $u^2 = 0$

zeitartig g.d.w. $u^2 > 0$

raumartig g.d.w. $u^2 < 0$

diese Eigenschaften sind wegen Lorentz-Invarianz von $(,)$ unabhängig vom gewählten Bezugssystem!



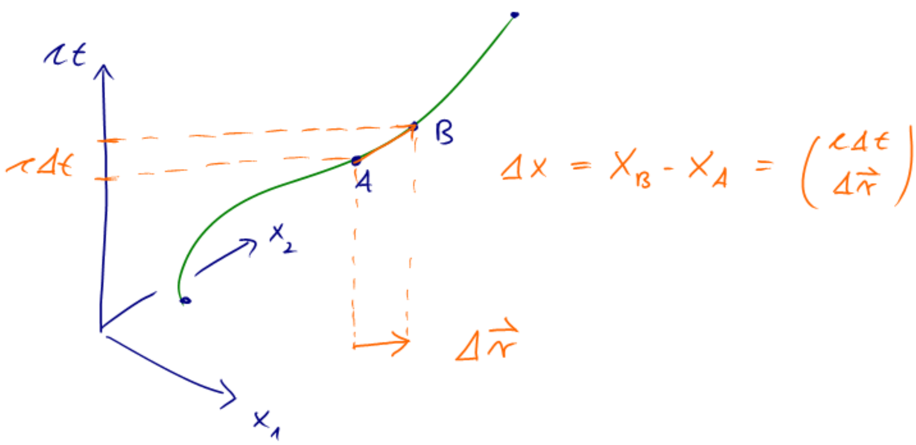
Eigenzeit:

Beobachter bewege sich längs Weltlinie

$$X(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix}$$

Zeit bzgl. K

Ort bzgl. K



Weltlinienelementlänge Δs zwischen A und B gegeben durch

$$\Delta s^2 = \Delta X^2 = c^2 \Delta t^2 - |\Delta\vec{r}|^2$$ (Lorentz-invariant!)

physikalische Bedeutung von Δs wird klar im momentanen Ruhesystem K', dass sich bei A gerade mit Geschw. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t_A)}{dt}$ relativ zu K bewegt:

bzgl. K' offenbar $\Delta\vec{r}\,' = \vec{0}$, weshalb

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2$$

d.h. $\frac{\Delta s}{c} = \Delta t'$ ist die im momentanen Ruhesystem des Beobachters vergangene Zeit!

→ $\boxed{\text{Eigenzeit } \Delta\tau := \frac{\Delta s}{c} = \text{inf. Zeitdifferenz im Ruhesystem}}$

Berechnung im System K:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - |\Delta\vec{r}|^2 = \left(1 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|^2\right) c^2 \Delta t^2$$

im Limes $\Delta t \to 0$ erhalten wir somit

$$d\tau \equiv \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \left|\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\right|^2}\, dt$$

mit $\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t)$ also

$$\boxed{d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt} \quad (*) \quad \text{(Zeitdilatation!)}$$

Für endliche Zeiten erhalten wir durch Integration:

$$\boxed{\tau_A - \tau_B = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}\, dt}$$

Vierer-Geschwindigkeit eines Teilchens mit

Weltlinie $X(t) = \begin{pmatrix} c\,t \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix}$:

$$\boxed{u := \frac{dX}{d\tau}}$$

da X Vierer-Vektor und τ Lorentz-invariant ist

u Vierer-Vektor !

Berechnung von u in K gemäß

$$u = \frac{dX}{d\tau} = \frac{dX}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \begin{pmatrix} c \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2}}}$$

mit $\boxed{\gamma(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}}}$ und $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

also $\boxed{u = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}}$

Ferner gilt $\underline{u^2} = \gamma^2 \left(c^2 - |\vec{v}|^2 \right) = \underline{c^2}$!