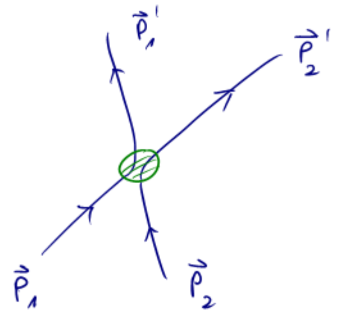
Relativistischer Impuls, Energie-Impuls-Vektor, Energie-Impuls-Erhaltung

Newtonsche Mechanik: Impuls eines Teilchens der Masse m, Geschwindigkeit v:

$$\vec{p}_{Newt.} = m\vec{v}$$

$\rightarrow$ Gesamtimpuls $\vec{P}_{Newt} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ eines abgeschl. Systems ist Erhaltungsgröße; etwa beim Stoß zweier Teilchen



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Wie lautet die „richtige" relativistische Version des Impulses?

Anforderungen:

(i) Übereinstimmung mit $\vec{p}_{Newt.}$ falls $v/c \ll 1$

(ii) Erhaltung im abg. System

(iii) Lorentztransformationsverhalten!

erfüllt durch folgende Definition:

relativistischer Vierer-Impuls eines Teilchens der Masse m auf Weltlinie $X(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix}$:

$$\boxed{p := m\,u} \equiv \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Vierer-Geschwindigkeit $u = \frac{dX}{d\tau}$

Masse $\equiv$ Ruhemasse des Teilchens

mit $u = \frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec v \end{pmatrix}$, wobei $\vec v = \dot{\vec r}$, also

$$p = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec v \end{pmatrix}$$

d.h. $$\boxed{\vec p = m\gamma \vec v = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\vec v}$$ „relativistischer Dreier-Impuls"

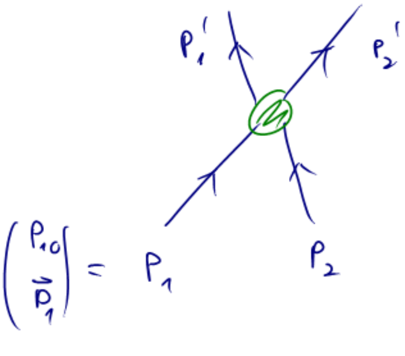
$$= \gamma\, \vec p_{Newt.}$$

Stoßexperimente mit Teilchen hoher Geschwindigkeiten $v \approx c$ zeigen Erhaltung des relativistischen Gesamtimpulses $\sum \vec p_i$, unabhängig vom gewählten Bezugssystem

$\longrightarrow$ auch $\sum_i p_{i,0}$ ist Erhaltungsgröße!

L.T. "mischt" zeitl. und räuml. Komponenten von $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec p \end{pmatrix}$

z.B. beim Stoß zweier Teilchen:



$$\vec p_1 + \vec p_2 \overset{!}{=} \vec p_1\,' + \vec p_2\,'$$

und

$$p_{10} + p_{20} \overset{!}{=} p_{10}' + p_{20}'$$

$\boxed{\text{physikalische Bedeutung der Nullkomponente } p_0 \text{ des Vierer-Impulses } p\ ?}$

dazu einfache Rechnung: wegen $u^2 \overset{!}{=} c^2$ und $p = mu$ offenbar $p^2 \overset{!}{=} m c^2$, d.h. p^2 konstant! $\longrightarrow$

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt} p^2 = \frac{d}{dt}\left(p_0^2 - |\vec{p}|^2\right) = 2\, \underset{m\gamma c}{\underset{\parallel}{p_0}}\, \dot{p}_0 - 2 \langle \underset{m\gamma\vec{v}}{\underset{\parallel}{\vec{p}}}, \dot{\vec{p}} \rangle$$

$$= 2m\gamma \big(\underbrace{c\dot{p}_0 - \langle \vec{v}, \dot{\vec{p}} \rangle}_{\overset{\parallel}{0} \; !} \big)$$

im Newtonschen Grenzfall $v/c \ll 1$ ist bekanntlich $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ $\equiv$ Kraft auf Teilchen und deshalb (für $\vec{F}$ = konst)

$$\frac{d}{dt}(c p_0) = \langle \vec{v}, \vec{F} \rangle = \frac{d}{dt} \underbrace{\langle \vec{r}, \vec{F} \rangle}_{\substack{\text{von } \vec{F} \text{ am} \\ \text{Teilchen verrichtete Arbeit}}} = \frac{d}{dt} \left(\underset{\text{des Teilchens}}{\text{kinet. Energie}} \right)$$

$c p_0$ ist deshalb (bis auf eine Konstante) die kinetische Energie des Teilchens;

da andererseits p_0 als Nullkomponente des Vierer-Impulse absolut festgelegt ist (Addition einer Konstanten zu p_0 würde Impuls in einem anderen Bezugssystem ändern ...), sagt Einstein:

> Die Energie eines freien Teilchens der Masse m und Geschwindigkeit v ist
>
> $$E \equiv c p_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

(da $p_0 = m\gamma c$)

Anmerkungen:

1) im Newtonschen Grenzfall $v/c \ll 1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

und damit $E = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$,

d.h. bis auf <u>Ruheenergie</u> mc^2 ist E die Newtonsche kin. Energie $\frac{m}{2} v^2$.

2) wegen $E = c p_0$ ist $\boxed{p = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}}$ und wird auch <u>Energie-Impuls-Vektor</u> genannt, die Erhaltung von $\sum_i p_i$ ist die relativistische <u>Energie-Impuls-Erhaltung</u>

3) offenbar <u>divergiert</u> $E = c p_0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} c^2$ für $v \nearrow c$

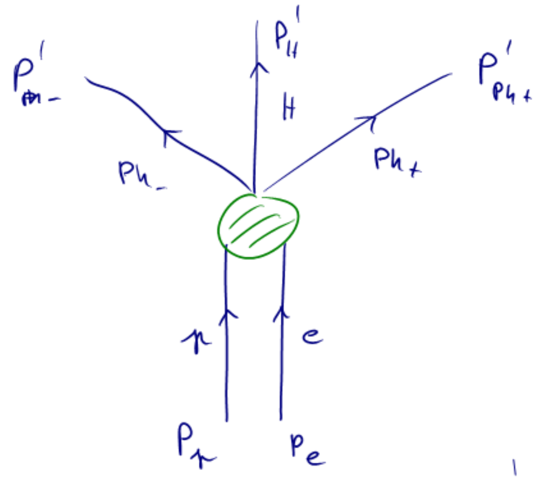
→ Teilchen nicht-verschwindender Masse m können nicht mit endlicher Energie auf exakt $v = c$ beschleunigt werden

4) <u>physikalische Signifikanz</u> der Ruheenergie $E_0 = mc^2$?

<u>Beispiel</u>: Rekombination von Proton p und Elektron e zu Wasserstoff H + Energie ΔE:

$$p + e \longrightarrow H + \Delta E \quad , \quad \Delta E = 13{,}6\, eV$$

$\hat{=}$ inelastischer Stoß:



4er-Impulse von

Proton : $p_p = (m_p c, \vec{0})$

Elektron : $p_e = (m_e c, \vec{0})$

H-Atom : $p'_H = (m_H c, \vec{0})$

jeweils Energie $\frac{\Delta E}{2}$ { „+" Photon : $p'_{Ph+} = \left(\frac{\Delta E}{2c}, +\vec{p}_{Ph}\right)$

„−" Photon : $p'_{Ph-} = \left(\frac{\Delta E}{2c}, -\vec{p}_{Ph}\right)$

Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\underbrace{p_p + p_e}_{= \begin{pmatrix} (m_p + m_e)c \\ \vec{0} \end{pmatrix}} \overset{!}{=} \underbrace{p'_H + p'_{Ph+} + p'_{Ph-}}_{= \begin{pmatrix} m_H c + \frac{\Delta E}{c} \\ \vec{p}_{Ph} - \vec{p}_{Ph} \end{pmatrix}} \quad \checkmark$$

→ H-Atom besitzt gegenüber $(m_p + m_e)$ um $\frac{\Delta E}{c^2}$ verringerte Masse

$$m_H = m_p + m_e - \frac{\Delta E}{c^2} \quad !$$

d.h. Massendefizit $\Delta m := m_p + m_e - m_H$ wird als Reaktionsenergie $\boxed{\Delta E = \Delta m c^2}$ freigesetzt

hier: $\frac{\Delta m}{m} \simeq 10^{-6}$, (nicht meßbar)

(bei Kernprozessen $\frac{\Delta m}{m} = 10^{-2}$ → direkt meßbar)