Elektrostatik

Grundproblem: gegeben statische Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$, finde elektrisches Feld $\vec{E}(r)$.

etwaiges Magnetfeld sei ebenfalls stationär $\rightarrow$ $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$

$\rightarrow$ stat. $\vec{E}$-Feld bestimmt durch

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \varrho/\varepsilon_0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}}$$

sehr hilfreich sind oft integrale Formen dieser Gleichungen:

Integration von $\operatorname{div} \vec{E} = \varrho/\varepsilon_0$ über ein bel. Volumengebiet V ergibt nach Anwendung des S. v. Gauß:

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V} \qquad (1)$$

wobei $Q_V = \int_V \varrho\, d^3\vec{r}$ die in V enthaltene Ladung ist;

Integration von $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ über ein bel. Flächenstück F ergibt mit S. v. Stokes

$$\boxed{\int_{\partial F} \vec{E}\, d\vec{l} = 0}$$

Beispiele:

1) Feld einer Pktldg q in 0:

Kugelsymmetrie $\rightarrow$ Ansatz $\vec{E}(\vec{r}) \overset{!}{=} E(r)\,\hat{r}$, $\left(r = |\vec{r}|,\ \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \right)$

bestimme $E(r)$ mittels (1) und $V = B_{r_0}$ $\longrightarrow$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} q \overset{!}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{B_{r_0}} \overset{(1)}{=} \int_{\partial B_{r_0}} \vec{E}\, d\vec{f} = 4\pi r_0^2\, E(r_0)$$

d.h. $E(r_0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$ und somit $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}\,\hat{r}}$ (2)

2) Feld einer Pktladg q in $\vec{r}_1$:

Translation von (2) um $\vec{r}_1$ ergibt $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} (\vec{r}-\vec{r}_1)}$

3) Feld von N Pktladgen $q_1, \dots, q_N$ an Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$:

durch <u>Superposition</u> der Felder $\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i)$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} E_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \dots$$

4) Feld einer kugelsymmetr. Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) \equiv \rho(|\vec{r}|)$:

Ansatz $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$; mit (1) für $V = B_{r_0}$

erhalten wir wie oben:

$$4\pi r_0^2\, E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{B_{r_0}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{r_0} dr\, 4\pi r^2 \rho(r)$$

$\rightarrow$ $E(r) = \dots$

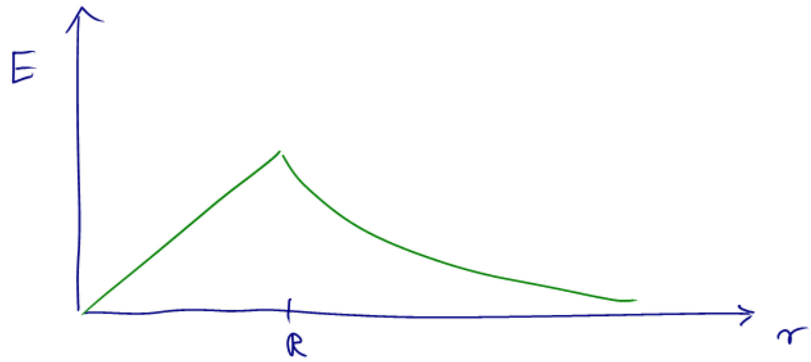
z.B. <u>homogene</u> Ladungsverteilung innerhalb einer Kugel vom Radius R:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & : r \leq R \\ 0 & : r > R \end{cases}$$

$\rightarrow$ Gesamtladung $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$

und $$Q_r \equiv Q_{B_r} = \begin{cases} Q \cdot \frac{r^3}{R^3} & : r \le R \\ Q & : r > R \end{cases},$$

also $$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \begin{cases} Q\,\frac{r}{R^3} & : r \le R \\ \frac{Q}{r^2} & : r > R \end{cases}}$$



Elektrostatisches Potenzial

wegen $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ ist das elektrostatische Feld $\vec{E}$ konservativ;

$\rightarrow$ $\vec{E}$ besitzt elektrostatisches Potenzial ϕ derart, dass

$$\boxed{\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi}$$

Beispiele

1) wegen $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$ besitzt das Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$ einer Ptkldg q in 0 das Potenzial $\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}}$

$\longrightarrow$ Translat. + Superposit.

2) Potenzial von N Ptkladgen $q_1, \dots, q_N$ in $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}$$

$\longrightarrow$ Kontinuums-übergang

3) Potenzial einer Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \; \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

<u>beachte</u>: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$ eingesetzt in $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

zeigt $-\rho/\varepsilon_0 = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) \equiv \Delta\phi$

d.h. ϕ genügt der Gleichung $\boxed{\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0}$

<u>Poisson-Gl.</u>