Magnetostatik

Grundproblem: gegeben stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, finde Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$

etwaiges $\vec{E}$-Feld sei statisch $\rightarrow$ $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, d. h. $\vec{B}$ bestimmt durch

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \qquad (*)$$

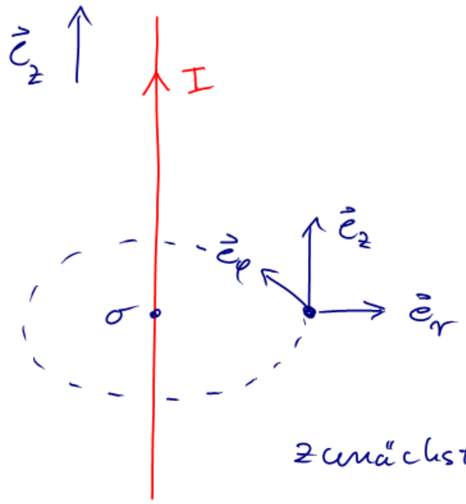
wie in Elektrostatik erhalten wir integrale Gleichungen durch Integration über Vol. V bzw Fl. F:

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{f} = 0 \quad , \quad \int_{\partial F} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_F} \qquad (**)$$

wobei $I_F = \int_F \vec{j}\, d\vec{f}$ der Strom durch F

$$\left[\int_{\partial F} \vec{B}\, d\vec{l} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \operatorname{rot} \vec{B}\, d\vec{f} \overset{(*)}{=} \int_F \mu_0 \vec{j}\, d\vec{f} = \mu_0 I_F \right]$$

Beispiel: Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Draht mit Strom I



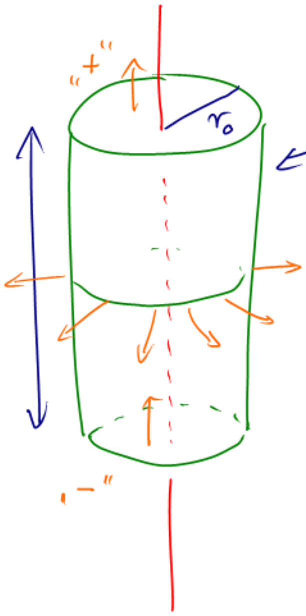
symmetrieverträglicher Ansatz:

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = B_\varphi(r)\, \vec{e}_\varphi + B_r(r)\, \vec{e}_r + B_z(r)\, \vec{e}_z$$

mittels $(**)$ und geeigneter Wahl von V bzw F zeigen wir

zunächst $\underset{(i)}{\boxed{B_r = 0}}$, $\underset{(ii)}{\boxed{B_z = 0}}$ (solange $B_z(r) = 0$ für $r \to \infty$):

(i)



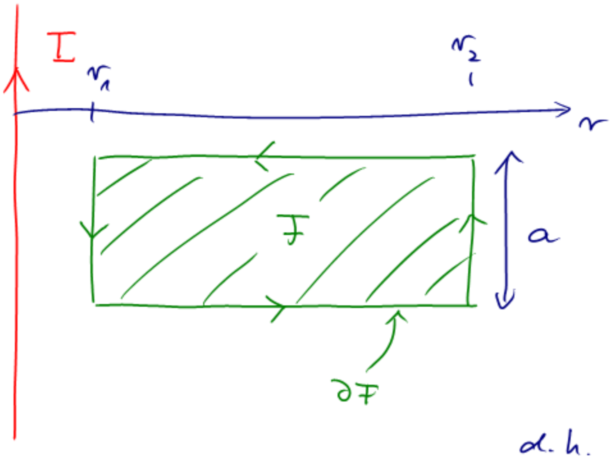
V = Zylinder, Länge L, Radius r_0

gemäß (**):

$$0 = \int_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{f} = 2\pi r_0 L\, B_r(r_0) + 0$$

$$\to \quad B_r(r_0) = 0 \,.$$

(ii)



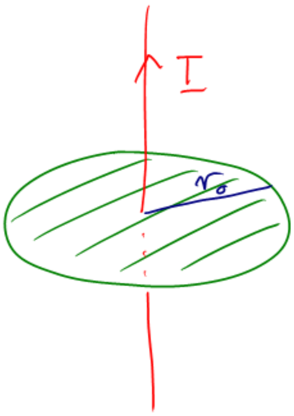
offenbar $I_F = 0$ und somit

$$0 = \int_{\partial F} \vec{B}\, d\vec{\ell} = a\big(B_z(r_2) - B_z(r_1)\big)$$

d.h. $B_z(r) = \text{konst} \equiv B_z(\infty) \equiv 0 \,.$

zuletzt bestimmen wir $B_\varphi(r)$:

(iii)



$F = K_{r_0} \equiv$ Kreisscheibe, Radius r_0 ;

offenbar $I_{K_{r_0}} = I$ und somit nach (**)

$$\mu_0 I = \int_{\partial K_{r_0}} \vec{B}\, d\vec{\ell} = 2\pi r_0\, B_\varphi(r_0)$$

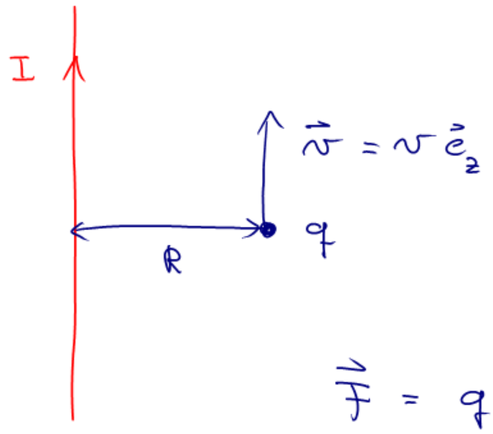
d.h. $\quad B_\varphi(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

alles zusammen:

$$\boxed{\vec{B}(r,\varphi,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \vec{e}_\varphi} \qquad (2)$$

Magnetfeld als relativistischer Effekt

eines langen geraden Drahts, Strom I



(gelte $v \ll c$)

bewegte Ladung erfährt Lorentzkraft

$$\vec F = q\,\vec v \times \vec B \overset{(2)}{=} -\frac{\mu_0 I q v}{2\pi R}\,\vec e_r$$

Paradoxon: • im Ruhesystem K' der Ladung q verschwindet wegen $v' = 0$ die eigentliche Lorentzkraft: $\vec F' = q\,\vec v' \times \vec B' \overset{!}{=} \vec 0$,

d.h. $$\vec F \neq \vec F'$$

• im Laborsystem K (ruhender Draht) wie in K' (ruhende Ladung) sollte Ladung gleiche Beschleunigung und damit gleiche Kraft erfahren: $$\vec F/m = \vec a = \vec a' = \vec F'/m ,$$

d.h. $$\vec F = \vec F'$$

Auflösung: da bzgl. K' $v' = 0$ muss es bzgl. K' ein elektrisches Feld $\vec E'$ geben, derart dass

$$q\vec E' = \vec F' \overset{!}{=} \vec F = -\frac{\mu_0 I q v}{2\pi R}\,\vec e_r$$

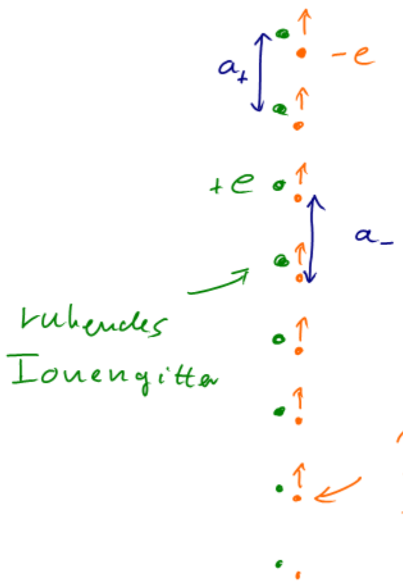
(bis auf Korrekt. $O(v^2/c^2)$)

$\rightarrow$ in E' erscheint Draht elektrisch geladen!

(mit Linienladungsdichte $\lambda' = -\mu_0 \varepsilon_0 I v$)

Woher kommt diese Ladung? <u>Lorentzkontraktion</u>!

dazu ein sehr einfaches Modell des stromführenden, bzgl. K elektrisch <u>neutralen</u> Drahts:



Linienladungsdichte der Ionen: $\lambda_+ = \frac{e}{a_+}$

" " " Elektr.: $\lambda_- = -e/a_-$

Strom: $I = -\frac{e v_e}{a_-}$

Ladungsneutralität (bzgl. K): $\lambda_{ges} = \lambda_+ + \lambda_- \overset{!}{=} 0$

mit $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_z$ (bzgl. K')

<u>bewegtes</u> Elektrongitter

(*) $\boxed{a_+ \overset{!}{=} a_-}$

Lorentztransformation nach K' resultiert wegen $v_e \neq 0$ zu <u>unterschiedlichen</u> Gitterkonstanten $a_+' \neq a_-'$ $\rightarrow$ $\lambda_{ges}' = \frac{e}{a_+'} - \frac{e}{a_-'} \neq 0$!

zur quantitativen Behandlung benötigen wir:

a_+^0 $\equiv$ Ionengitterkonstante im Ruhesystem der Ionen (K)

a_-^0 $\equiv$ Elektronengitterkonst. " " " Elektronen ($\tilde{K}$)

$\hookrightarrow$ $\boxed{a_+^0 = a_+}$ und $a_- = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}\, a_-^0$

d.h. $a_-^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}\, a_-$, nach (*) also $\boxed{a_-^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}\, a_+}$ (**)

- a_+' bestimmt aus a_+^0 durch L.T $K \rightarrow K'$: <u>Relativgeschw.</u> v

$$\rightarrow \quad a_+' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, a_+$$

• a_-' bestimmt aus a_-^0 durch L.T $\tilde{K} \to K'$: Relativgeschw. $v - v_e$

$$\to \quad a_-' = \sqrt{1-\frac{(v-v_e)^2}{c^2}}\; a_-^0 \overset{(**)}{=} \frac{\sqrt{1-\frac{(v-v_e)^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}}\; a_+$$

$$\to \lambda_{ges}' = \frac{e}{a_+'} - \frac{e}{a_-'} = \frac{e}{a_+}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\sqrt{1-v_e^2/c^2}}{\sqrt{1-\frac{(v-v_e)^2}{c^2}}}\right)$$

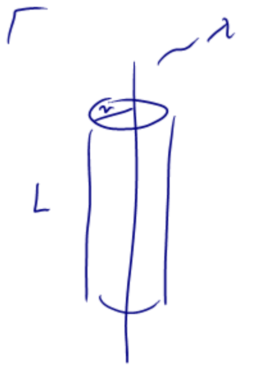
$$= \frac{e}{a_+}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \left(1-\frac{1}{2}v_e^2/c^2\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{(v-v_e)^2}{c^2}\right)\right)$$

$$= \frac{e}{a_+}\left(\frac{v_e v}{c^2} + \cancel{\mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}, v_e^4/c^4\right)}\right)$$

$$= -\frac{I v}{c^2} = -I\mu_0\varepsilon_0 v$$

$$I = -\frac{e v_e}{a_-} = -\frac{e}{a_+}v_e \qquad \frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$$

diese Linienladungsdichte λ_{ges}' führt mit Gauß auf



$$2\pi r L E(r) \overset{!}{=} \frac{L\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}'(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi r} \to \vec{F}' = q\vec{E}'\Big|_{|\vec{r}|=R} = -\frac{\mu_0 I v q}{2\pi R}\vec{e}_r \overset{!}{=} \vec{F}$$

Bemerkungen:

• relativistische Formulierung der ED ermöglicht direkte Lorentztransf. $(\vec{E}=\vec{0}, \vec{B}) \longrightarrow (\vec{E}' \neq 0, \vec{B}')$

- aufg. der sehr kleinen Geschwindigkeit von etwa $v_e = 1\,\mathrm{cm/s}$ (bei $A_{\mathrm{Draht}} \approx 1\,\mathrm{mm}^2$, $I = 10\,A$) führt Lorentzkontraktion auf relative Längenänderung von nur

$$\sqrt{1 - v_e^2/c^2} - 1 \approx 10^{-20} \quad !$$

Beobachtbare Effekte resultieren aus der extrem hohen Dichte der Leitungselektronen von ca $10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$, entsprechend $|\lambda_\pm| \approx 10\,C\,\mathrm{cm}^{-1}$!