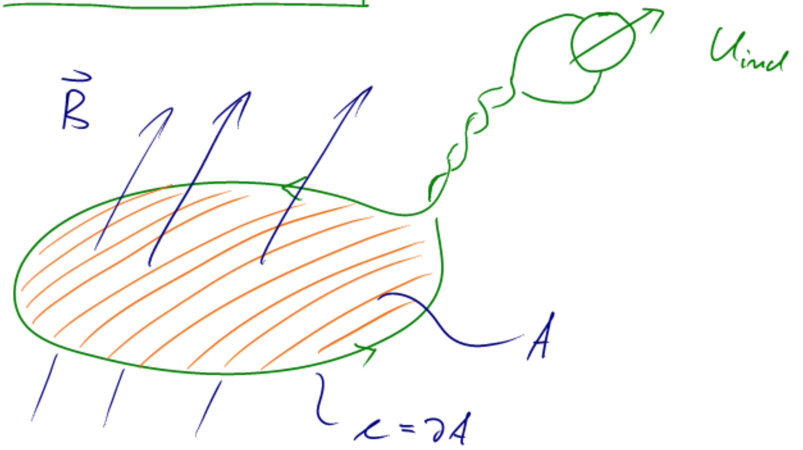
Faradaysches Induktionsgesetz

$\Phi = \int_A \vec{B}\, d\vec{f}$ sei der magnetische Fluss durch eine von einer Leiterschleife $\mathcal{C}$ aufgespannte Fläche A. Die in $\mathcal{C}$ induzierte elektr. Spannung U_{ind} ist gegeben durch

$$\boxed{U_{ind} = \frac{d}{dt}\Phi}$$



Anmerkungen:

1) U_{ind} ist definiert als die Arbeit, die benötigt wird eine Einheitsladung einmal längs der Schleife zu bewegen,

d.h. $\quad U_{ind} \overset{\text{Def.}}{=} -\int_{\mathcal{C}} \frac{\vec{F}_L}{q}\, d\vec{\ell}$; wobei

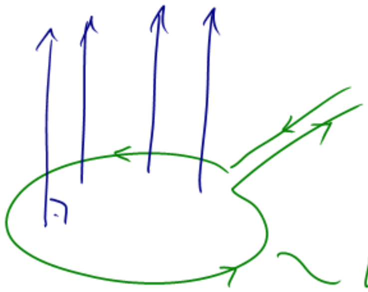
$\vec{F}_L = q(\vec{E} \times \vec{v} \times \vec{n})$ Lorentzkraft auf Pktldg q

2) Induktionsgesetz gilt insbesondere für den Fall einer bewegten Schleife und der daraus resultierenden Flussänderung $\dot{\Phi}$.

bevor wir das Induktionsgesetz aus den Max.-Glen deduzieren betrachten wir zwei einfache Beispiele:

1) statische Schleife im oszillierenden Magnetfeld:

$$\vec{B}(t) = B_0\, \vec{e}_z \cos(\omega t)$$

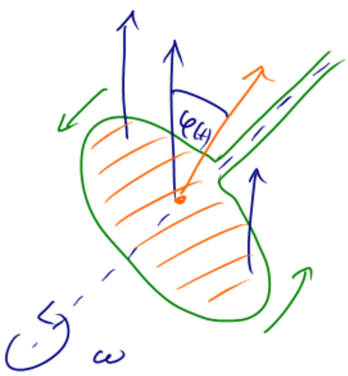


Kreisring, Radius R : ∂K_R

$$\rightarrow \quad \Phi(t) = \int_{K_R} \vec{B}(t)\, d\vec{f} = \pi R^2 B_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \quad U_{ind}(t) = \frac{d\Phi}{dt}(t) = -\pi R^2 B_0\, \omega \sin(\omega t)$$

2) rotierende Schleife im konstanten Magnetfeld:



$$\vec{B} = B_0\, \vec{e}_z$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

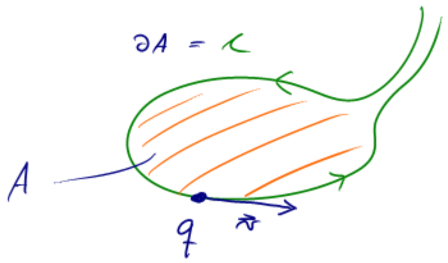
$$\hookrightarrow \quad \Phi(t) = \pi R^2 B_0 \cos \omega t$$

$$\hookrightarrow \quad U_{ind} = -\pi R^2 B_0\, \omega \sin \omega t$$

Deduktion des Induktionsgesetzes:

(a) für den Fall einer <u>statischen</u> Schleife $\mathcal{C} = \partial A$

$$U_{ind} = -\int_{\mathcal{C}} \frac{\vec{F}_L}{q}\, d\vec{l} = -\int_{\mathcal{C}} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l}$$



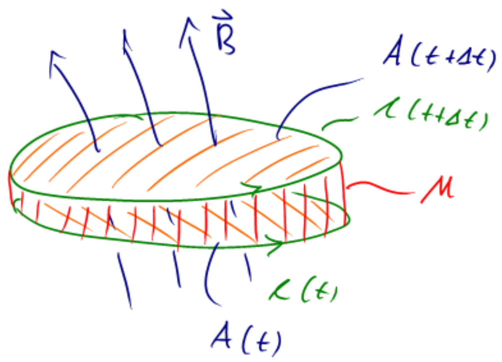
wegen $\vec{v} \parallel d\vec{l}$ ist $(\vec{v} \times B) \cdot d\vec{l} = 0$ und somit

$$U_{ind} = -\int_c \vec{E}\, d\vec{l} \underset{\substack{\text{Stokes,}\\ c = \partial A}}{=} -\int_A \operatorname{rot} \vec{E}\, d\vec{f} \underset{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}{=} \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f} \underset{A \text{ statisch}}{=} \frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\, d\vec{f}$$

$$= \frac{d}{dt} \Phi \quad .$$

(b) für den Fall einer <u>beweglichen</u> Schleife $c(t)$ im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t) \right) = ?$$



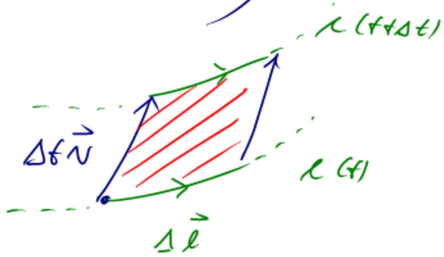
V sei das durch $A(t+\Delta t)$, $-A(t)$ und M berandete Volumen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \int_V \operatorname{div} \vec{B}\, d^3r \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{f}$$

mit $\partial V = A(t+\Delta t) - A(t) + M$ erhalten wir somit

$$0 = \underbrace{\int_{A(t+\Delta t)} \vec{B}\, d\vec{f}}_{\textstyle \overset{\shortparallel}{\Phi(t+\Delta t)}} - \underbrace{\int_{A(t)} \vec{B}\, d\vec{f}}_{\textstyle \overset{\shortparallel}{\Phi(t)}} + \int_{M} \vec{B}\, d\vec{f}$$

also $$\Delta \Phi = - \int_{M} \vec{B}\, d\vec{f} = -\Delta t \int_{l(t)} \overbrace{\langle d\vec{l} \times \vec{v}, \vec{B} \rangle}^{\textstyle \langle \vec{v} \times \vec{B}, d\vec{l} \rangle} \equiv -\Delta t \int_{l(t)} \vec{v} \times \vec{B}\, d\vec{l}$$



d.h. $$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \int_{l(t)} (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l} \underset{\substack{\mathrm{rot}\,\vec{E}=0, \\ l \text{ geschlossen}}}{=} - \int_{l(t)} \underbrace{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}_{=\vec{F}_L/q} d\vec{l} = U_{ind} \quad \checkmark$$

(1) Falls $\vec{B}$ und l variabel:

$$\frac{d\Phi}{dt}(t_0) = \frac{d}{dt}\left(\int_{A(t)} \vec{B}(t)\, d\vec{f} \right)\Bigg|_{t_0} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B}(t_0)\, d\vec{f} \Bigg|_{t_0}}_{\substack{= \text{ b)} \\ -\int_{l(t_0)} (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{A(t_0)} \vec{B}(t)\, d\vec{f} \Bigg|_{t_0}}_{\substack{= \text{ a)} \\ -\int_{l(t_0)} \vec{E}\, d\vec{l}}}$$

$$= - \int_{l(t_0)} (\underbrace{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}}_{\vec{F}_L/q})\, d\vec{l} = U_{ind} \quad \checkmark$$

Elektromagnetische Wellen

wir betrachten elektr.-mag. Felder in Abwesenheit von Ladungen und Strömen, d.h.

$$\boxed{\rho = 0 \quad , \quad \vec{j} = \vec{0}}$$

somit $\vec{E}$, $\vec{B}$ beschrieben durch

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & \operatorname{div} \vec{E} = 0 \;, & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3) \\ (2) & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \;, & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{array}}$$

mittels Identität $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ erhalten wir aus rot (4), (2) und (3):

$$-\Delta \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

mit Lichtgeschwindigkeit $c := \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ also

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

Wellengleichungen der ED

und analog:

Spezielle Lösungen sind etwa ebene, harmonische Wellen:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{\hat{k}\times\vec{E}_0}{c}}_{\vec{B}_0} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$\omega = c\,|\vec{k}|$

$\vec{k}$: Wellenvektor

wegen $\operatorname{div}\vec{E}=0$; $\operatorname{div}\vec{B}=0$ ist $\vec{k}\perp\vec{E}_0$

und $\vec{k}\perp\vec{B}_0$; $\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ erfordert dann

$\vec{B}_0=\frac{1}{c}\,\hat{k}\times\vec{E}$.

Lokale Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

elektrische Ladungen können nicht verschwinden sondern nur verschoben werden!

d.h. für ein beliebiges Volumengebiet V ist

$$\boxed{\frac{dQ_V}{dt}\overset{!}{=}-I_{\partial V}}=-\int_{\partial V}\vec{j}\,d\vec{f}\overset{\text{Stokes}}{=}-\int_V \operatorname{div}\vec{j}\,d^3\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,d^3\vec{r}\underset{V\text{ statisch}}{=}\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d^3\vec{r}$$

d.h. für bel. V ist $\boxed{\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}\right)d^3\vec{r}=0}$

da dies für bel. V gilt, muss der Integrand verschwinden:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0}$$

Kontinuitätsgleichung $\Longleftrightarrow$ lokale Ladungserhaltung die Maxwellsche ED ist konsistent zur Ladungserhaltung:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}}_{= 0} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\varepsilon_0 \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{= \rho} \Big) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \checkmark$$