Energiesatz der Elektrodynamik

Ausgangspunkt: <u>lokale Leistungsdichte</u> des el-mag. Feldes ist

$$\boxed{p = -\vec{j}\cdot\vec{E}}$$

[genommen aus mikr. Modell: Pktldg q der Geschw. $\vec{v}$ im Feld $\vec{E}$ <u>gewinnt</u> Energie mit Leistung $\frac{\delta W}{\delta t} = q\,\frac{\vec{E}\cdot\delta\vec{\ell}}{\delta t} = q\vec{v}\cdot\vec{E} \;\hat{=}\; +\vec{j}\cdot\vec{E}$]

Ersetzung von $\vec{j}$ mittels $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

ergibt

$$p = +\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}(\operatorname{rot}\vec{B})\,\vec{E}$$

mit $\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{E}|^2$ und $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{B}$

erhalten wir daraus

$$p = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{E}|^2 \underbrace{- \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\underbrace{\operatorname{rot}\vec{E}}_{= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}}_{+\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{B}|^2} + \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})$$

d.h.

$$p \equiv -\vec{j}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

mittels folgender Definitionen wird dies zu einer (verallg.) Kontinuitätsgleichung für

- el.-mag. <u>Energiedichte</u> $\boxed{u := \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2}$

und

- el.-mag. <u>Energiestromdichte</u> $\boxed{\vec{S} := \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$,
  (<u>Poyntingvektor</u>)

nämlich →

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}}$$

(Energiesatz der ED, s.v. Poynting)

durch Integration über ein bel. Vol V und $\int_V \operatorname{div}\vec{S}\, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} \vec{S}\, d\vec{f}$ (nach Stokes) erhalten wir die integrale Form des Energiesatzes:

$$-\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V u\, d^3\vec{r}}_{} = +\underbrace{\int_{\partial V}\vec{S}\, d\vec{f}}_{} + \underbrace{\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}}_{}$$

U_V: im V enthaltene el-mag. Energie

$I_{\partial V}$: Energie-strom durch ∂V

P_{mech}: mechanische Leistung im V:

d.h.:

$$\boxed{-\frac{d}{dt}U_V = I_{\partial V} + P_{mech}}$$

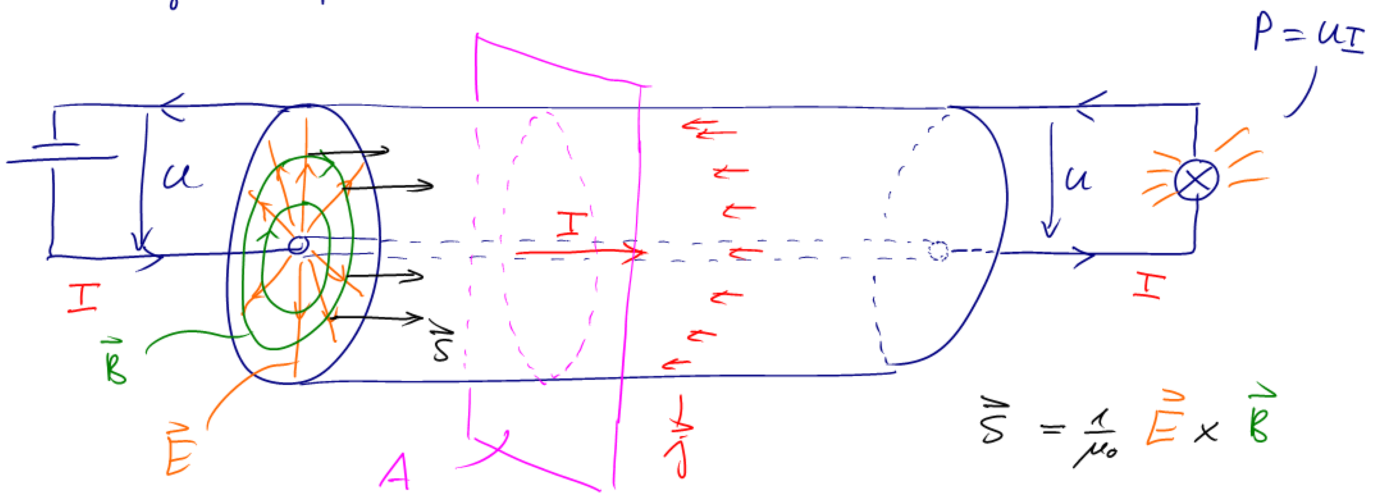
Merke: el-mag. Feld "speichert" Energie mit Dichte

$u = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$ und "transportiert" Energie

mit Stromdichte $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$!

Beispiele (qualitativ):

1) Energietransport durch Koaxialkabel:

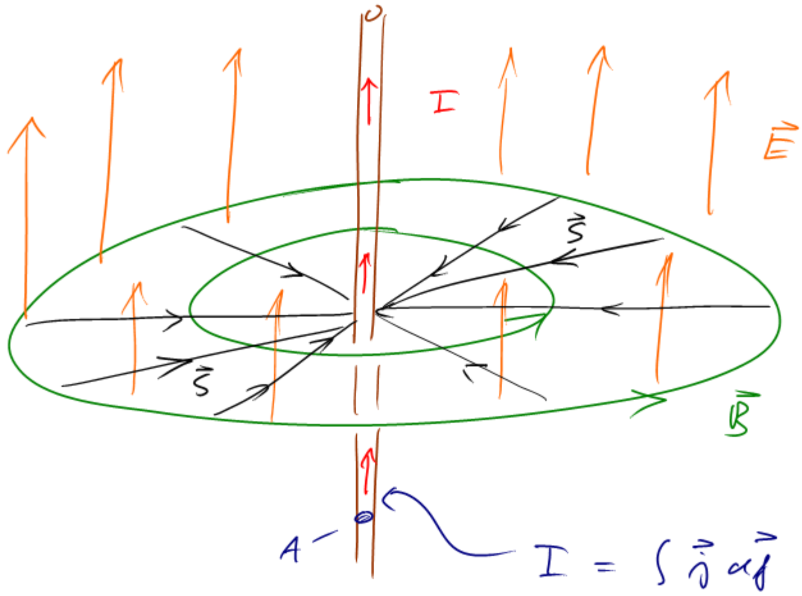


ohne große Schwierigkeiten rechnet man nach, dass

$$\int_A \vec{S}\, d\vec{f} \overset{!}{=} P = UI$$

.

2) langer gerader Leiter mit (geringer) Leitfähigkeit σ im parallelen elektr. Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$:



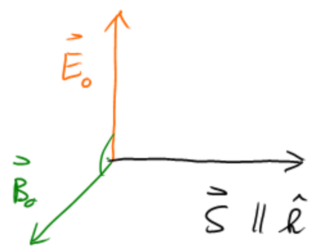
$$I = \int_A \vec{j}\, d\vec{f} \underset{\vec{j} = \sigma \vec{E}}{=} \int_A \sigma \vec{E}\, d\vec{f}$$

Die radial einströmende Energie hält den elektr. Strom gegen den elektr. Widerstand des Leiters aufrecht.

3) Energietransport durch el.-mag. Welle:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}_0}{c} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

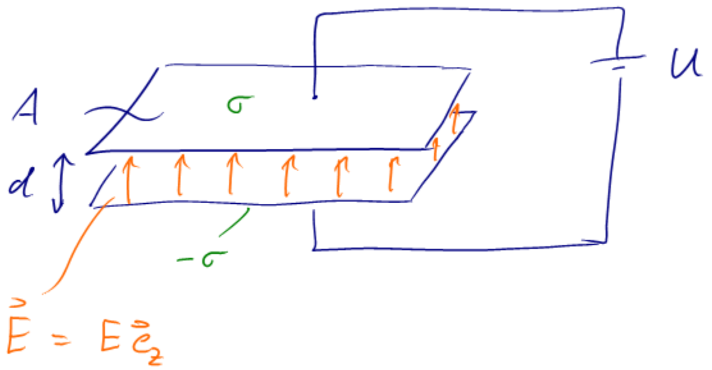


$$\rightarrow \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{|\vec{E}_0|^2}{\mu_0 c} \hat{k} \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{E}_0 \times (\hat{k} \times \vec{E}_0) = |\vec{E}_0|^2 \hat{k}$$

zeitlich gemittelt: $\quad \overline{\vec{S}} = \dfrac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 c} \hat{k} \quad$ (wegen $\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$)

4) Energiespeicherung im Plattenkondensator:



mit $E = \sigma/\varepsilon_0$ und $u = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2$ erhalten wir

$$W_{el} = Vd \cdot u = Ad\,\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{A\varepsilon_0}{d}\left(\frac{d\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2$$

wegen $U = dE = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0}$ und $C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$ (vgl. Exp.-ph II)

also
$$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2 .$$