Elementare Beispiele

a) Wurf eines Körpers

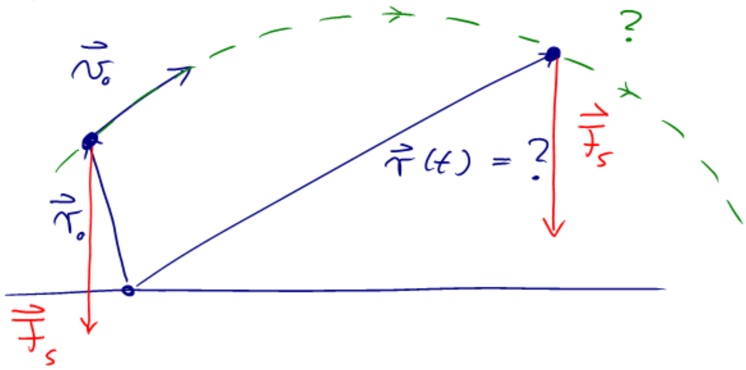
b) lineare rücktreibende Kraft

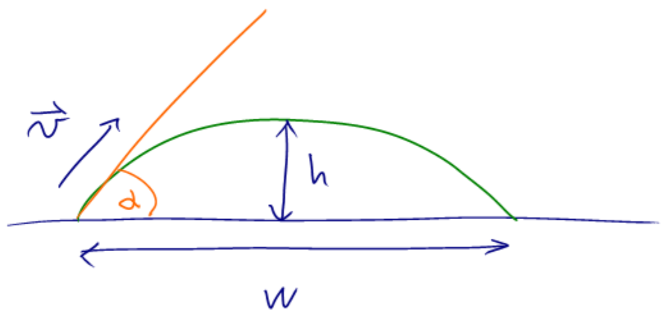
a) Wurf eines Körpers mit träger Masse m;

Erfahrung: Körper erfährt konstante Schwerkraft $\vec{F}_s$!

unabhängig von Ort und Bewegungszustand des Körpers

- Welche Bahn $\vec{r}(t)$ nimmt Körper unter dieser Schwerkraft ?



- 

Weite W ?

Höhe H ?

maximale Weite ?

Newton: $\quad m\,\ddot{\vec{r}}(t) \overset{!}{=} \vec{F}_s$

$$\text{d.h.} \quad \boxed{\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{\vec{F}_s}{m} =: \vec{a}_s} \; ; \qquad (1)$$

Körper bewegt sich mit konstanter Beschleunigung

$\vec{a}_s = \vec{F}_s / m$: Schwerebeschleunigung

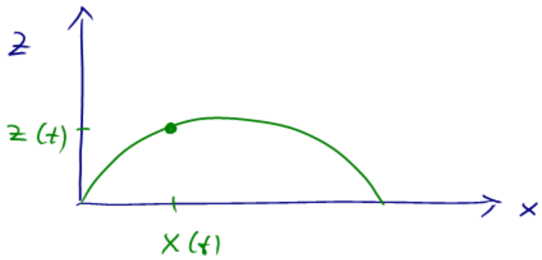
$\longrightarrow$

Lösung der Bewegungsgleichung (1) zu $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ (vgl. Vrlsg 1 , konstant beschl. Bewegung) :

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2}$$

Falls $\vec{r}_0 = \vec{0}$ und $\vec{v}_0 = v\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ 0\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ folgt mit $\vec{a} = -a\,\vec{e}_z$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v\cos\alpha\; t\\ 0\\ v\sin\alpha\; t - \frac{a}{2}t^2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(t)\\ 0\\ z(t)\end{pmatrix}$$



Bestimmung der Bahnkurve $z(x)$:

$$x(t) = v\cos\alpha \cdot t \quad \longrightarrow \quad t(x) = \frac{1}{v\cos\alpha}\, x$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{z(x) \equiv z(t(x)) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x - \frac{a}{2}\,\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}\, x^2}$$

„Wurfparabel"

Weite W bestimmt durch $z(W) \overset{!}{=} 0$

d.h. $0 \overset{!}{=} W\left(\sin\alpha - \frac{a}{2}\,\frac{1}{v^2\cos\alpha}\, W\right)$

$$\longrightarrow \quad \boxed{W = \frac{v^2}{2a}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v^2}{a}\sin 2\alpha}$$

d.h. maximale Weite für $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ ist $\boxed{W_{max} = v^2/a}$

Höhe h bestimmt durch $\dot{z}(t_0) \overset{!}{=} 0$, $h \overset{!}{=} z(t_0)$

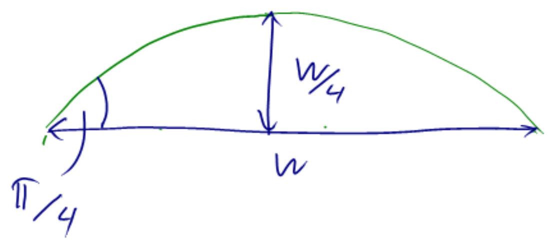
$$\dot{z}(t) = v \sin\alpha - a\,t$$

$$\rightarrow \quad t_0 = \frac{v}{a}\sin\alpha \quad \text{und} \quad h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{a} - \frac{a}{2}\left(\frac{v}{a}\sin\alpha\right)^2$$

d.h. $\boxed{h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}\sin^2\alpha} \rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{v^2}{2a} = \frac{w_{max}}{2}}$

Höhe bei Wurf maximaler Weite: $\alpha = \pi/4$

$$\rightarrow \boxed{h = \frac{1}{4}\frac{v^2}{a} = \frac{w_{max}}{4}}$$



erstaunliche Beobachtung (spätestens seit Galilei):

alle Körper erfahren dieselbe Schwerebeschleunigung

$$\vec{a}_s = -g\,\vec{e}_z \quad \text{mit} \quad g \approx 9{,}8\ m/s^2 \ !$$

wegen $\vec{a}_s = \vec{F}_s/m$ muss daher Schwerkraft direkt proportional zur trägen Masse sein.

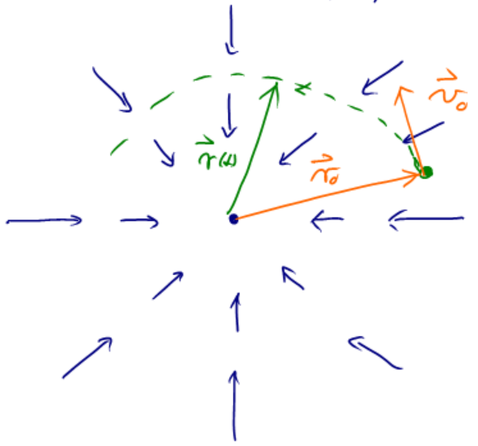
> Warum ist die "Schwere" eines Körpers so eng mit seiner "Trägheit" verknüpft?

später mehr dazu!

b) MP der (trägen) Masse m erfahre am Ort $\vec{r}$ die Kraft

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r}}\,, \qquad k<0$$

Kraftfeld: attraktiv, linear, isotrop



Welche Bahn $\vec{r}(t)$ nimmt MP zu Anfangsort $\vec{r}_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$?

Newton: $$m\,\ddot{\vec{r}}(t) = -k\,\vec{r}(t)$$

d.h. $$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{k}{m}\,\vec{r}(t)$$

Dimension $1/\text{Zeit}^2$ = Frequenz^2

d.h. $\omega = \sqrt{k/m}$ von Dimension Frequenz und

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2\,\vec{r}(t)}$$

lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit allg. Lösung

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$$

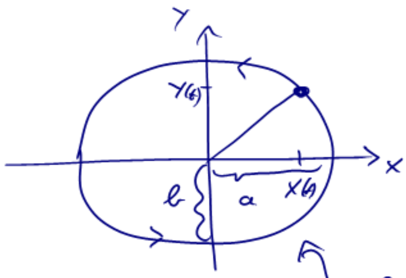
damit $\vec{r}(0) \overset{!}{=} \vec{r}_0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ setze $\vec{A} = \vec{r}_0$, $\vec{B} = \vec{v}_0/\omega$;

d.h. $$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0\cos\omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t}$$

beachte $\vec{r}(t) \perp \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$, d.h. Bahn verläuft im Eben $\perp$ $\vec{r}_0, \vec{v}_0$

z.B. $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ b\omega \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos\omega t \\ b \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{für alle } t)$$

Bahn beschreibt Ellipse