Elektrodynamische Potenziale, inhomomogene Wellengleichung, retardierte und avancierte Potenziale

Motivation: Erzeugung el.-mag. Wellen durch beschleunigte Ladungen

$\rightarrow$ bestimme $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ zu gegebenen $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$!

Erinnerung: Elektrostatik: $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E}=0}$ $\rightarrow$ $\exists$ elektrostat. Pot. ϕ :

$$\boxed{\vec{E}=-\operatorname{grad}\phi}$$

genügt Poisson-Gl.: $\boxed{\Delta\phi=-\rho/\varepsilon_0}$ (1)

elektrostat. Pot. einer Pktladg q in $\vec{r}\,'$: $\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

$\rightarrow$ elektrostat. Pot zu $\rho(\vec{r})$:

Superposition

$$\boxed{\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}} \quad (2)$$

Magnetostatik:

$\boxed{\operatorname{div}\vec{B}=0}$ $\rightarrow$ $\exists$ Vektorpotenzial $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}}$$

Ampèresches Gesetz $\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A})-\Delta\vec{A}$ zeigt, dass

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A})-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}$$

unter Nebenbedingung ("Eichbedingung") $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ genügt $\vec{A}$ also ebenfalls einer Poisson-Gl.:

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \quad (1') \qquad \Big(\text{d.h. } \Delta A_i = -\mu_0 j_i \quad i = 1, 2, 3 \Big)$$

analog zu (1) bzw. (2) schließen wir, dass $\vec{A}$ zu $\vec{j}(\vec{r})$ gegeben ist durch

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d^3 r'} \qquad (2')$$

Verallgemeinerung für <u>nicht</u>-stationäre Dichten und Stromdichten $\varrho(\vec{r}, \underline{t})$ bzw. $\vec{j}(\vec{r}, \underline{t})$ wie folgt:

(i) es existieren elektro<u>dynamische</u> Potenziale $\phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ derart, dass

$$(3) \qquad \boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}} \quad (\text{genau wie zuvor})$$

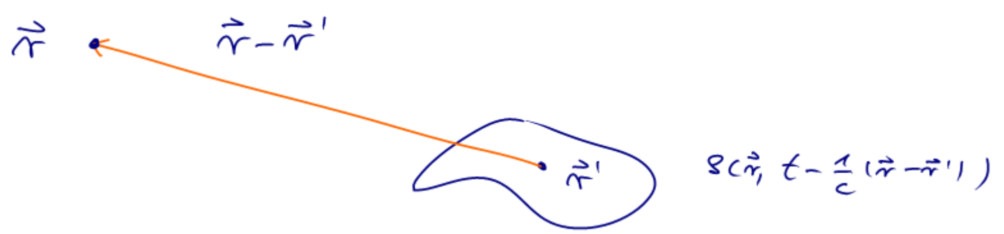
(ii) in Lorenz-Eichung, $\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \overset{!}{=} 0}$ (4), genügen ϕ und $\vec{A}$ den <u>inhomogenen</u> Wellengleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\varrho / \varepsilon_0 \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$

(iii) spezielle Lösungen der inhomog. Wellengl.en sind die <u>retardierten Potenziale</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_r(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,' \\ \vec{A}_r(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,' \end{aligned}} \qquad (5)$$

<u>Bem.</u>: ein zur <u>retardierten Zeit</u> $t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ in $\vec{r}\,'$ ausgesandtes "Signal" erreicht in Lichtgeschwindigkeit c den Ort $\vec{r}$ genau zur Zeit t:



⌐ zu (i): auch im dynamischen Fall $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$\longrightarrow$ Existenz eines dyn. Vektorpotenzials $\vec{A}$ mit $\operatorname{rot} \vec{A} \stackrel{!}{=} \vec{B}$

damit wird $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ zu $\operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$;

d.h. $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ist <u>konservativ</u>

$\longrightarrow$ Existenz eines dyn. Skalarpotenzials ϕ mit

$$-\operatorname{grad} \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} .$$

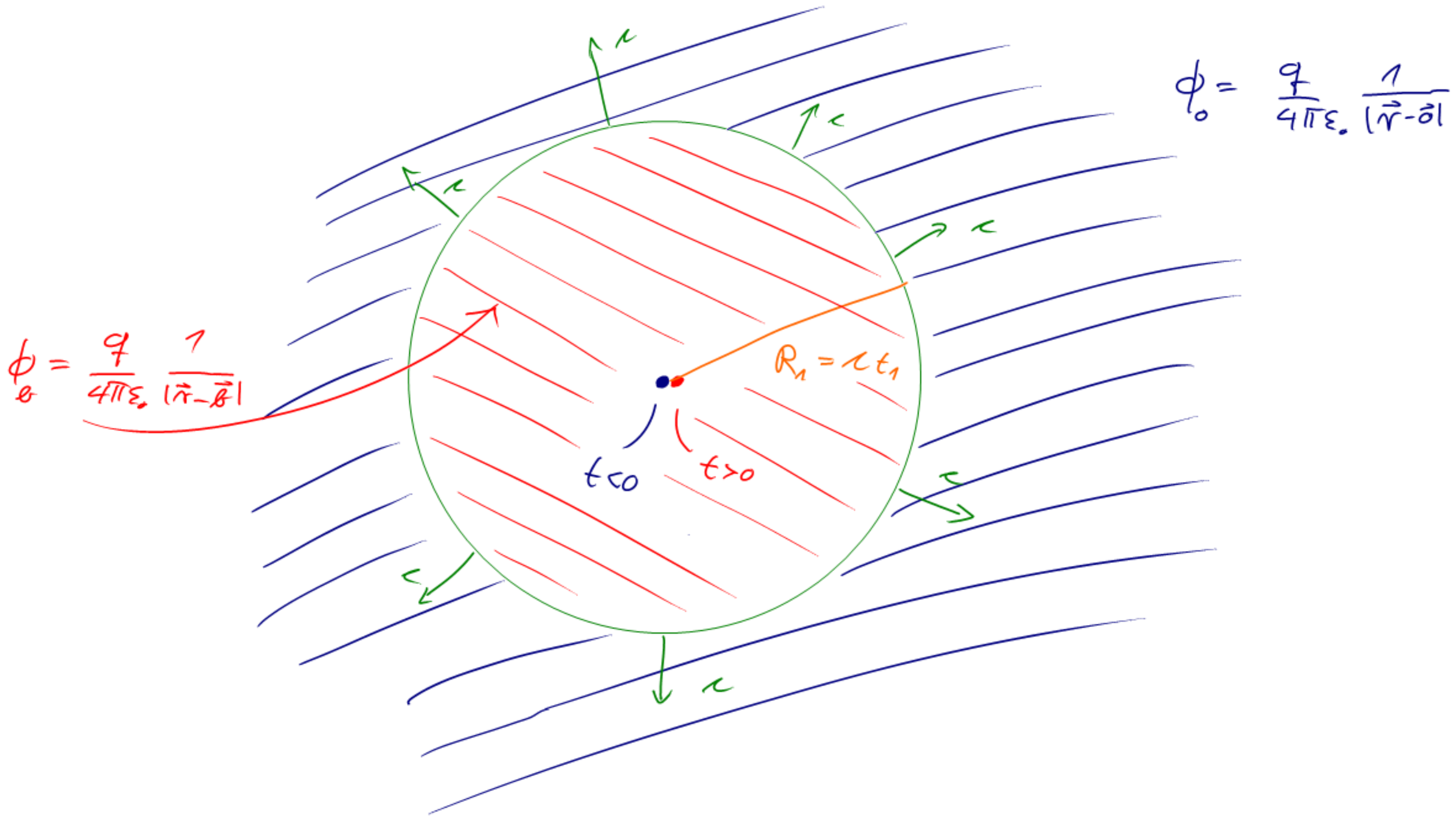
zu (ii): Einsetzen von (3) in Maxwellsche Gl.en unter Berücksichtigung von Eichbedingung (4)

zu (iii): Verifikation durch direktes Einsetzen in die inhomog. Wellengleichung (etwas aufwendig ...)

elementares Beispiel (schematisch):

Verrückung einer Pktladg q von $\vec{0}$ nach $\vec{b}$ zur Zeit $t = 0$:

retardiertes Potenzial ϕ_r zur Zeit $t_1 > 0$:



d.h. die Potentialänderung von $\phi_0 \to \phi_b$, verursacht durch die Verrückung der Pktladg zur Zeit $t = 0$, breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit c in einer auslaufenden Kugelwelle aus.

Bemerkung: neben den retardierten Potenzialen ϕ_r und $\vec{A}_r$ sind auch die avancierten Potenziale ϕ_a und $\vec{A}_a$ Lösungen der Wellengleichung:

$$\phi_a(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}\,', t + \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{A}_a(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t + \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d^3\vec{r}\,'$$

aufgrund des Vorzeichenwechsels im Zeitargument des Integranden entsprechen sie genau den retardierten Potenzialen mit umgekehrter Zeitrichtung!

im obigen Beispiel ergeben somit die avancierten Potenziale eine mit Lichtgeschwindigkeit einlaufende Kugelwelle, die bei $t=0$ in $\vec{0}$ eintrifft und die dortige Ladung q nach $\vec{b}$ vernichtet.

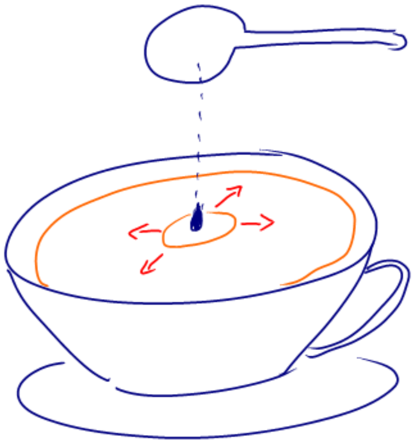
Bemerkungen:

1) die Zeitumkehrinvarianz der E.D. erfordert die Existenz der gegenüber $\phi_r, \vec{A}_r$ „zeitgespiegelten" Potenziale $\phi_a, \vec{A}_a$

2) beobachtbar sind i.d.R. immer nur die retardierten Lösungen, da nur(*) für diese die Anfangsbedingungen lokal und damit experimentell realisierbar sind

(*) auch hier bestätigen Ausnahmen die Regel:

retardierte und avancierte Wellen in der Teetasse:



auslaufende Kreiswelle

≙ retardierte Lösung

einlaufende Kreiswelle

≙ avancierte Lösung

(der inhom. Wellengl.)