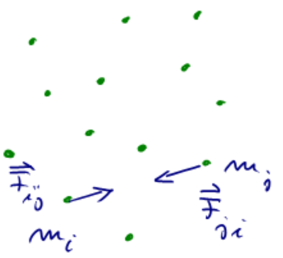
Erhaltungsgrößen eines Newtonschen N-Teilchen System

Newt. N-Teilchen System:

N MPe mit Massen $m_1, m_2, \dots, m_N$

an Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:



[z.B. Gas, Flüssigkeit, Festkörper, Polymer, ..., Sonnensystem, ..., Galaxie, ...]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{interne Kräfte} & \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \\ \text{externe Kräfte} & \vec{F}_i^{\alpha}(\vec{r}_i) \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ Kraft auf i-ten MP:

$$(1) \qquad \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \vec{F}_i^{\alpha}(\vec{r}_i)$$

beachte: wegen Gegenwirkungsprinzip (iii) ist

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = - \vec{F}_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$$

mit Ausdruck (1) für Kraft auf i-ten MP erhalten wir aus $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ (Newt. (ii)) N Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))}$$

$\hat{=}$ $3N$ gekoppelte DGL-en 2. Ordnung ;

$\longrightarrow$ eindeutig bestimmte Lsgen $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_N(t)$ ("Bahnen")
z.B. für vorgegebene Anfangsorte $\vec{r}_1^{\,\circ}, \ldots, \vec{r}_N^{\,\circ}$ und
Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}_1^{\,\circ}, \ldots, \vec{v}_N^{\,\circ}$ zu einem Zeitpkt. t_0

$\rightarrow$ „Determinismus des Newtonschen Universums":

aus (bekanntem) Zustand $\{\vec{r}_i(t_0), \vec{v}_i(t_0)\}$
zu einem Zeitpkt. t_0 folgt der Zustand
$\{\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t)\}$ zu beliebigen Zeiten t !

- analytische Lösung i.d.R. nur für $N \leq 2$
- numerische Lösungen auch für relativ große N möglich !

(z.B. Millennium-Simulation zur Strukturbildung im Universum: $N = 10^{10}$!)

⚠ Vorsicht: numerische Lösungen oft instabil !

d.h. numerische Fehler wachsen exponentiell mit Δt, sodass Bahnbestimmung nur für "kleine" Zeiten möglich, darüber hinaus „chaotisches" Verhalten

"Mechanik" des 20. Jhdts.: "es gibt chaotische Systeme"; trotz Determinismus keine Vorhersage möglich !

- allgemeine Aussagen möglich und hilfreich in Form von Erhaltungssätzen

$\Rightarrow$ studiere Schwerpunkt, Impuls, Drehimpuls und Energie eines (abgeschlossenen) Erhaltungssystem:

(Gesamt)masse: $\quad M := \sum_{i=1}^{N} m_i$

Schwerpunktsvektor: $\quad \vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$

(Gesamt)impuls: $\quad \vec{P} := \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$

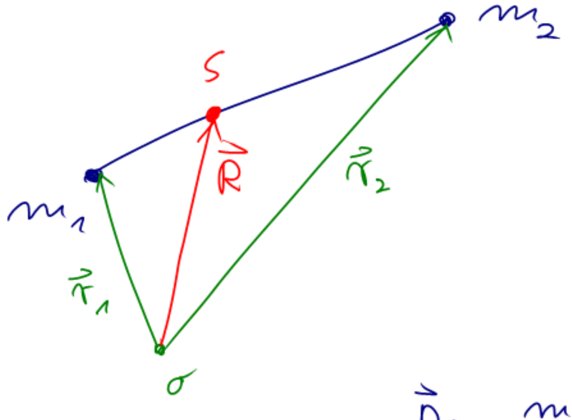
(Gesamt)drehimpuls: $\quad \vec{L} := \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} m \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Anmerkungen:

- Schwerpktsvektor $\vec{R}$ ist Ortsvektor des Schwerpunkts S

  Für $N = 2$: S teilt Verbindungsstrecke der MPe im umgekehrten Verhältnis der Massen:



$$\frac{\ell_1}{\ell_2} \overset{!}{=} \frac{m_2}{m_1}$$

(warum?)

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

• offenbar $\vec{P} \overset{!}{=} M \dot{\vec{R}}$ (warum?)

Definition :

N - Teilchen System abgeschlossen

$:\Longleftrightarrow$ alle externen Kräfte verschwinden,

$\vec{F}_i^{\alpha} = \vec{0}$ für $i = 1, \dots, N$

Wir zeigen :

$\boxed{\text{Impuls } \vec{P} \text{ und Drehimpuls } \vec{L} \text{ eines abgeschlossenen } N\text{-Teilchen-Systems sind zeitlich konstant (d.h. Erhaltungsgrößen). Der Schwerpunkt des abgeschl. Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig mit Geschwindigkeit } \vec{V} = \vec{P}/M.}$