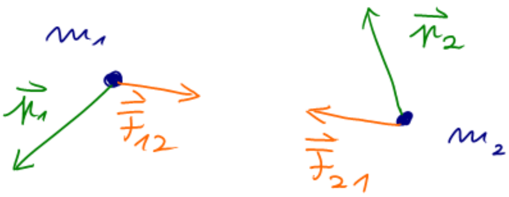
Wir zeigen die Erhaltung des Gesamtimpulses der Einfachheit halber zuerst für abgeschlossenes Zwei-Teilchen System:



$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

es genügt zu zeigen, dass $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 \underset{\text{Newton (ii)}}{=} \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \underset{\text{Newton (iii)}}{=} \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} = \vec{0}$$

✓

Für ein N-Teilchen System: $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \underset{\text{Newton (ii)}}{=} \sum_i \vec{F}_i$$

Kraft auf das i-te Teilchen ist gegeben durch interne Kräfte $\vec{F}_{ij}$:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \quad ;$$

Somit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})}$$

Hälfte der doppelten Summe

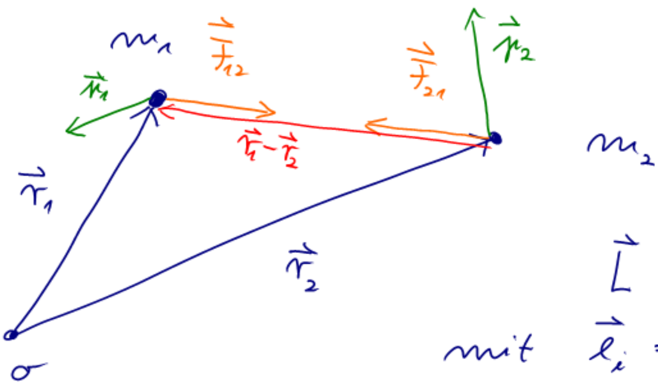
Newton (iii)

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij}(\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = \vec{0}. \quad ✓$$

Erhaltung des Gesamtdrehimpulses:

<u>$N=2$:</u>



$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$$

mit $\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$,

wegen $\dot{\vec{\ell}}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{\substack{= \\ \vec{0} \\ \text{da } \dot{\vec{r}}_i \parallel \vec{p}_i}} + \vec{r}_i \times \underbrace{\dot{\vec{p}}_i}_{\substack{= \\ \vec{F}_i \\ \text{Newton (ii)}}} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

und $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12}$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21}$ folgt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \underbrace{\vec{F}_{21}}_{\substack{= \\ -\vec{F}_{12} \\ \text{Newton (iii)}}} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0} \quad \checkmark$$

da nach Newton (iii) $\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

<u>für allg. N:</u> $\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{\ell}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$;

mit $\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}$ also

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right)$$

$$\underset{\text{Newton (iii)}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{\substack{= \\ 0}} = \vec{0} \quad \checkmark$$

$\leftarrow \parallel (r_i - r_j)$

nach Newton (iii)

In Gegenwart von externen Kräften $\vec{F}_i^{ex}$ sind Impuls und Drehimpuls i. A. nicht mehr konstant sondern genügen Impuls- und Drehimpulssatz:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Impulssatz:} & \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ex} \\ & \text{bzw.} \quad M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ex} \quad ; \\ \text{Drehimpulssatz:} & \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ex} \end{array}}$$

wobei

$$\vec{F}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ex} \quad : \text{externe Gesamtkraft}$$

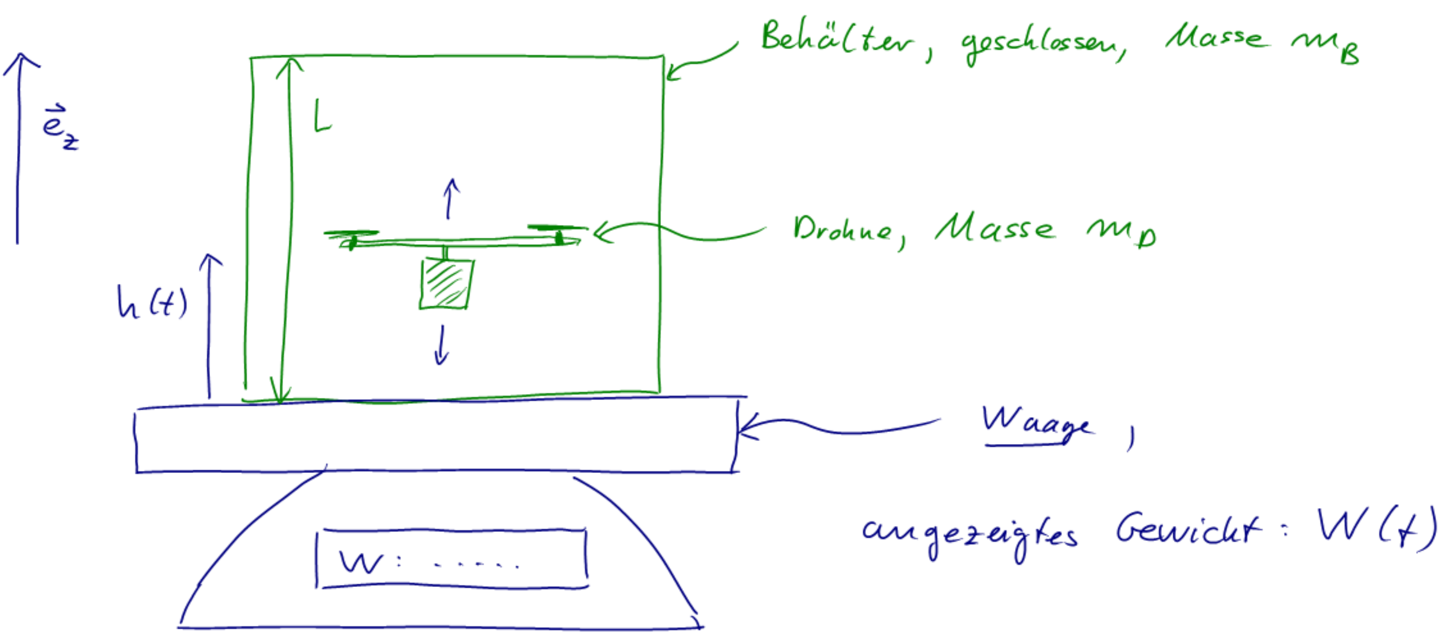
$$\vec{M}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ex} \quad : \text{externes Gesamtdrehmoment}$$

zum Beweis beachten wir, dass interne Kräfte keinen Beitrag zu $\dot{\vec{P}}$ bzw $\dot{\vec{L}}$ liefern (s.o.!) und somit

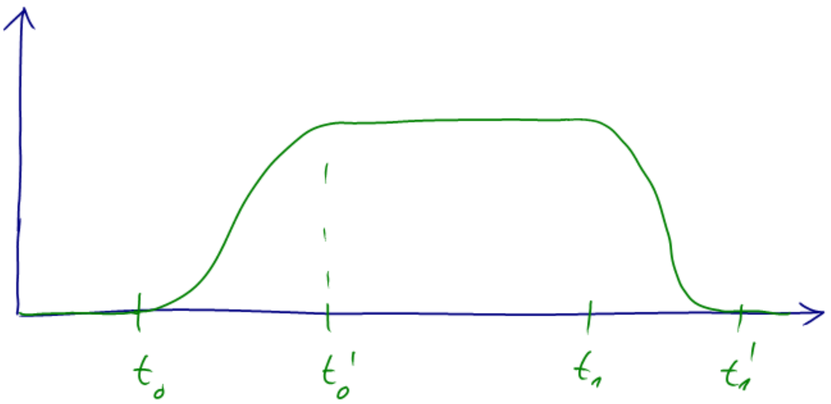
$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \underset{\text{Newton (ii)}}{=} \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{int}}_{=\vec{0}\,!} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{ex}}_{=\vec{F}^{ex}} = \vec{F}^{ex} \quad ,$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{\ell}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int}}_{=0\,!} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}^{ex}}_{=\vec{M}^{ex}} = \vec{M}^{ex} .$$

als Anwendungsbeispiel des Impulssatses betrachten wir folgendes Problem:



Flughöhe der Drohne im Behälter sei $h(t)$, etwa



,

welches Gewicht $W(t)$ wird angezeigt?

Lösung des Problems mittels <u>Impulssatzes</u>:

System $\equiv$ Behälter (inkl. eingeschl. Luft) + Drohne,

<u>externe Kräfte auf System</u>:

1) <u>Schwerkraft</u>: $\vec{F}_S = -M g \vec{e}_z$; $M = m_B + m_D$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

2) <u>Kontaktkraft Waage – Behälter:</u>

$$\vec{F}_{BW} = W(t)\, g\, \vec{e}_z + \vec{F}_{\parallel}$$

$$\perp \vec{e}_z$$

d.h. $$\vec{F}^{ex} = \vec{F}_S + \vec{F}_{BW}$$

$$= \left(W(t) - M \right) g\, \vec{e}_z + \vec{F}_{\parallel}$$

Impulssatz:

$$M \ddot{\vec{R}} = \left(W(t) - M \right) g\, \vec{e}_z + \vec{F}_{\parallel}$$

wobei $\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Schwerpunktsvektor der Drohne,

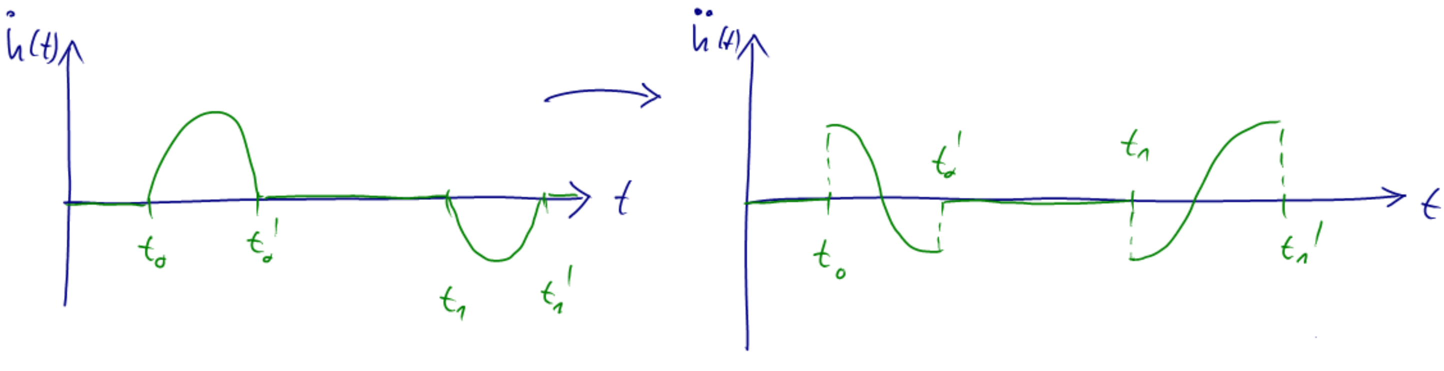
$$\rightarrow \quad M \ddot{z} = \left(W(t) - M \right) g$$

bzw: $$\boxed{W(t) = M + M \frac{\ddot{z}}{g}}$$

mit $z(t) = \frac{1}{M} \left(m_B \cdot \frac{L}{2} + m_D\, h(t) \right)$ also

$$\boxed{W(t) = M + m_D \frac{\ddot{h}(t)}{g}}$$

für $h(t)$ wie oben erhalten wir (qualitativ):



d. h.