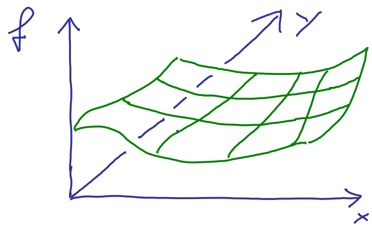
Energieerhaltung in der Newtonschen Mechanik:

konservative(s) Kraft(feld), Potenzial, potenzielle und kinetische Energie

Erinnerung: Skalarfeld, Vektorfeld, Gradient, Potenzial

Skalarfeld f $\equiv$ Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

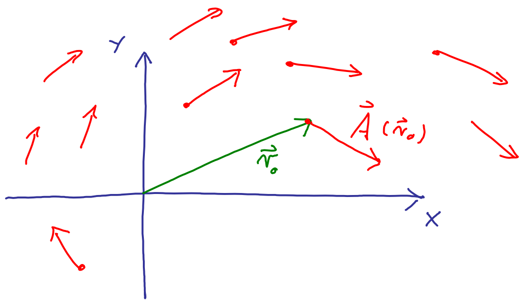
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z)$$



$\leftarrow$ Graph einer Abb. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Vektorfeld $\vec{A}$ $\equiv$ Abbildung $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r} \longmapsto \vec{A}(\vec{r})$$



Gradient von f in $\vec{r}$:

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$$

Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

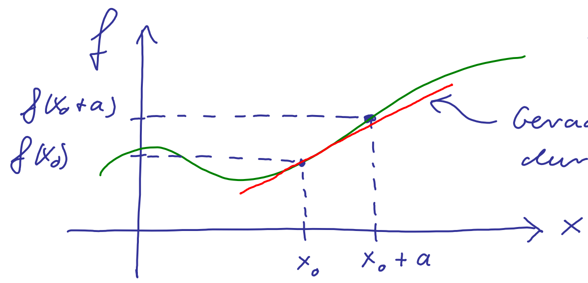
beachte:

$$\underline{\text{Skalarfeld}} \xrightarrow{\text{grad}} \underline{\text{Vektorfeld}}$$

$f : \vec{r} \longmapsto f(\vec{r})$ $\qquad$ $\operatorname{grad} f : \vec{r} \longmapsto \operatorname{grad} f(\vec{r})$

Gradient ist im wesentlichen die 3D Verallgemeinerung der Ableitung in 1D:

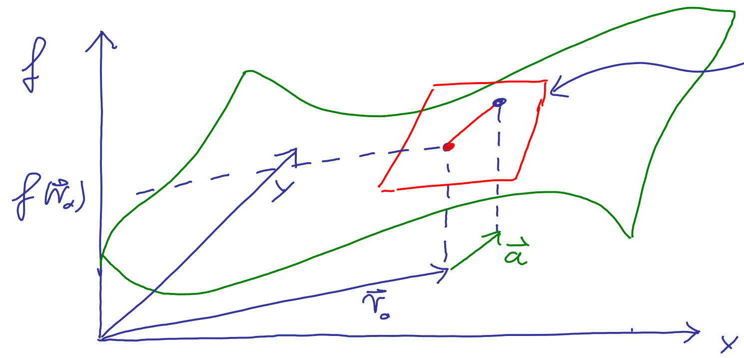
1D:



Tangente des Graphs bei $(x_0, f(x_0))$
$\equiv$ Gerade der Steigung $m = f'(x_0)$ durch $(x_0, f(x_0))$

$$\rightarrow \quad \boxed{f(x_0+a) = f(x_0) + f'(x_0)\,a} + \mathcal{O}(a^2)$$

3D:



Tangential „Fläche" des Graphs bei $(\vec{r}_0, f(\vec{r}_0))$

$$\rightarrow \quad \boxed{f(\vec{r}_0 + \vec{a}) = f(\vec{r}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{r}_0) \cdot \vec{a}} + \mathcal{O}(a^2)$$

lineare Näherung von f in $\vec{r}_0$ durch $\operatorname{grad} f(\vec{r}_0)$!

→
- $\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r})$
- $\operatorname{grad} f(\vec{r}) \parallel$ „Richtung des stärksten Anstiegs von f in $\vec{r}$"
- $\operatorname{grad} f(\vec{r}_0) \perp$ Niveaufläche von f in $\vec{r}_0$
- $\left.\dfrac{d}{dt} f(\vec{r}(t))\right|_{t_0} = \operatorname{grad} f(\vec{r}(t_0)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0)$

(vgl. Math. Meth., Übungen, Tutorium)

Def.:

Skalarfeld U ist ein Potenzial des Vektorfelds $\vec{A}$ g.d.w.

$$\boxed{\vec{A} \overset{!}{=} -\operatorname{grad} U}$$

Ein Vektorfeld $\vec{A}$ ist konservativ g.d.w. es ein Potenzial besitzt.

Beispiel:

Das Vf $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$ ist konservativ weil $U(\vec{r}) = \frac{1}{2} k |\vec{r}|^2 = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ ein Potenzial von $\vec{F}$ ist:

$$\operatorname{grad} U(\vec{r}) = \frac{k}{2} \vec{\nabla} (x^2+y^2+z^2) = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\vec{F}(\vec{r}) \quad \checkmark$$

Satz

Für ein VF $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\vec{A}$ konservativ

(ii) $\vec{A}$ besitzt ein Potenzial

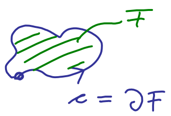
(iii) $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$ $\qquad (\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A})$

(iv) für jeden geschlossenen Weg c ist $\oint_c \vec{A}\, d\vec{l} = 0$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Definition $\checkmark$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): S.v. Schwartz: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ $\checkmark$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): S.v. Stokes:



$$\oint_c \vec{A}\, d\vec{l} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{f} \underset{iii)}{=} 0 .$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii): $U(\vec{r}) := -\int_{c_{\vec{r}_0, \vec{r}}} \vec{A}\, d\vec{l}$ ist nach (iv) wohldef. und ergibt $\operatorname{grad} U = -\vec{A}$! (*)

$\uparrow$ bel. Weg von $\vec{r}_0 \to \vec{r}$

(*) 

$$\rightsquigarrow \quad U(\vec r+\vec a) = -\int_{c_0+c_1} \vec A\, d\vec l$$

$$= \underbrace{-\int_{c_0} \vec A\, d\vec l}_{=\,U(\vec r)} \quad \underbrace{-\int_{c_1} \vec A\, d\vec l}_{=\,-\vec A(\vec r)\cdot\vec a \,+\, O(a^2)}$$

durch Vergleich mit $\quad U(\vec r+\vec a) = U(\vec r) + \operatorname{grad} U(\vec r)\,\vec a + O(a^2)$

erkennen wir $\quad -\vec A(\vec r) = \operatorname{grad} U(\vec r)$. ✓ ┘

zurück zur Mechanik:

MP der Masse m bewege sich im Kraftfeld $\vec F(\vec r)$
($\equiv$ Vektorfeld $\vec F : \vec r \mapsto \vec F(\vec r)$); d.h. Bahn $\vec r(t)$ genügt

$$m\,\ddot{\vec r}(t) = \vec F(\vec r(t))\ ;$$

kinetische Energie des MP sei

$$T(t) = \frac{m}{2}\,|\dot{\vec r}(t)|^2\ ;$$

falls $\vec F$ konservativ mit Potenzial $U(\vec r)$, sei

$$V(t) = U(\vec r(t))$$

die potenzielle Energie des MPs.

Energieerhaltungssatz (für MP im Kraftfeld)

Im konservativen Kraftfeld ist die Gesamtenergie

$$E(t) = T(t) + V(t) \equiv \frac{m}{2}|\dot{\vec r}|^2 + U(\vec r(t))$$

zeitlich konstant.

┌ „konservativ" vom lat. „conservare": erhalten, bewahren
hier: Energie-erhaltend. ┘

<u>Beweis</u>: $\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t) + U(\vec{r}(t))\right)$

$= m\,\dot{\vec{r}}(t)\cdot\ddot{\vec{r}}(t) + \operatorname{grad} U(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)$

$= \dot{\vec{r}}(t)\cdot\Big(\underset{\substack{\| \\ \vec{F}(\vec{r}(t))}}{m\,\ddot{\vec{r}}(t)} + \underbrace{\operatorname{grad} U(\vec{r}(t))}_{= -\vec{F}(\vec{r}(t))}\Big) = 0$.

da $\vec{r}(t)$ Bahn, Newton (ii)

U ist Potential von $\vec{F}$

Energiesatz besonders hilfreich in 1D:

Koordinate x, konserv. Kraft $F(x) = -U'(x)$

Bahn $x(t)$ genügt $m\ddot{x}(t) = F(x(t))$,

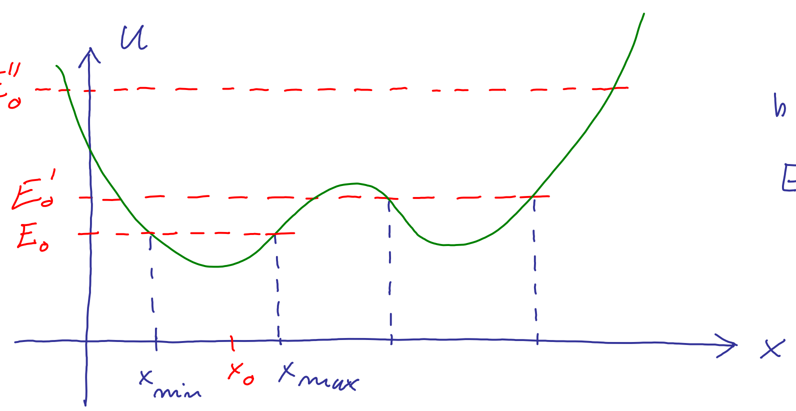
$E(t) = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + U(x(t))$ konstant!

$\rightarrow \quad (\dot{x}(t))^2 = \frac{2}{m}(E_0 - U(x(t))) \overset{!}{\geq} 0$

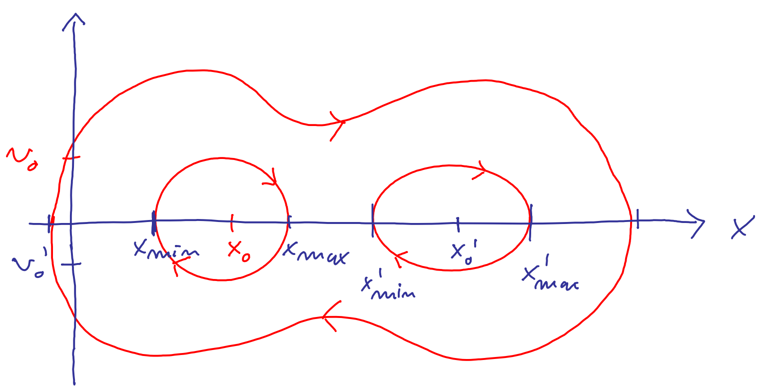
$E_0 = E(0) = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$

$\rightarrow$ x_{min}, x_{max} bestimmt durch $E_0 = U(x_{\{\substack{min \\ max}\}})$

etwa:



qualitativ!



quantitativ:

$$\boxed{\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(x(t))\right)}} \qquad (*)$$

$\uparrow$

DGL 1. Ordnung zur Bestimmung von $x(t)$!

„+": $v_0 > 0$

„−": $v_0 < 0$

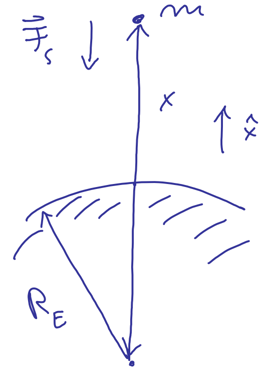
Bestimmung der Bahn $x(t)$ mit $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$:

1) $E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + U(x_0)$

2) bestimme Lsg $x(t)$ von DGL $(*)$ mit $x(0) = x_0$ durch „Trennung der Variablen":

$$\rightarrow \quad \boxed{t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}}$$

Beispiel: freier Fall aus großer Höhe:



$$\vec{F}_s = -mg\frac{R_E^2}{x^2}\,\hat{x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{mg\,R_E^2}{x}\right)\hat{x}$$

d.h. $U(x) = \frac{mg\,R_E^2}{x}$ etc.

(vgl. Übungen)