Energiesatz für konservatives N-Teilchen System

externe konservative Kräfte:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i) = -\operatorname{grad} U_i(\vec{r}_i) \quad ,$$

$U_i(\vec{r})$: externes Potenzial des i-ten MP

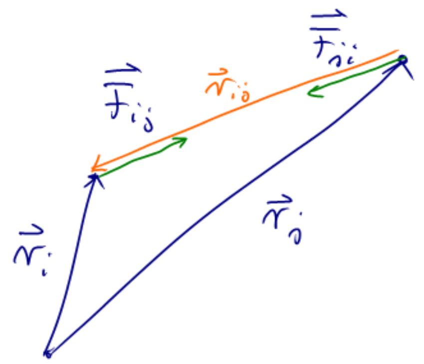
interne konservative Kräfte (≡ konservative Wechselwirkungskraft)

$$\boxed{\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial r}(r_{ij})\,\hat{r}_{ij}} \quad , \qquad (1)$$

$U_{ij}(r)$: Wechselwirkungspotenzial, symmetrisch: $U_{ij}(r) \overset{!}{=} U_{ji}(r)$

$$\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| \quad , \quad \hat{r}_{ij} = \vec{r}_{ij}/r_{ij}$$



beachte: Wechselwirkungskräfte nach (1) erfüllen

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad , \quad \vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij} \quad \text{und}$$

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i + \vec{a}, \vec{r}_j + \vec{a}) = \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \qquad \text{(Translations-invarianz)}$$

⌜ Beispiel: Coulom-Wechselwirkung elekt. geladener Teilchen: Ladungen q_i

Coulomb-Potenzial: $U^c_{ij}(r_{ij}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{ij}}$

→ Coulomb-kraft:

$$\vec{F}^c_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = - \frac{\partial U^c_{ij}}{\partial r}(r_{ij})\, \hat{r}_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$$

kinetische Energie: $T(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} |\dot{\vec{r}}_i(t)|^2$

potenzielle Energie:

$$V(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} U_i(\vec{r}_i(t))}_{= V_{ex}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} U_{ij}(r_{ij}(t))}_{V_{ww}(t)}$$

beachte: die Bahnen $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ sind wie immer Lösungen der Bewegungsgleichungen $m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i^{ges}(t)$

mit $\vec{F}_i^{ges}(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_i(t)) + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i(t), \vec{r}_j(t))$

Energiesatz

Die Gesamtenergie $E(t) = T(t) + V(t)$ eines konservativen N-Teilchen Systems ist eine Erhaltungsgröße (d.h. zeitlich konstant).

Zum Beweis zeigen wir $\frac{dE}{dt} = 0$;

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}_i|^2\right) = \sum_i m \langle \ddot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \rangle$$

$$\frac{dV_{ex}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} U_i(\vec{r}_i(t)) = \sum_i \langle \underbrace{\operatorname{grad} U_i(\vec{r}_i(t))}_{= -\vec{F}_i(\vec{r}_i(t))}, \dot{\vec{r}}_i(t) \rangle$$

$$= - \sum_i \langle \vec{F}_i(\vec{r}_i), \dot{\vec{r}}_i \rangle \quad ;$$

$$\frac{dV_{ww}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{d}{dt} U_{ij}(r_{ij}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial U_{ij}}{\partial r}(r_{ij}(t)) \cdot \frac{d r_{ij}(t)}{dt}$$

mit $\frac{d r_{ij}(t)}{dt} = \langle \hat{r}_{ij}(t), \dot{\vec{r}}_{ij}(t) \rangle = \langle \hat{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \rangle$

$$= \langle \hat{r}_{ij}(t), \dot{\vec{r}}_i \rangle - \langle \hat{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j \rangle ,$$

$\hat{r}_{ij} = - \hat{r}_{ji}$ und $U_{ij}(r) = U_{ji}(r)$ erhalten wir

$$\frac{dV_{ww}}{dt} = \sum_{ij} \langle \underbrace{\frac{\partial U_{ij}}{\partial r}(r_{ij})\, \hat{r}_{ij}}_{= -\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}, \dot{\vec{r}}_i \rangle$$

d. h. $\frac{d}{dt}(V_{ex} + V_{ww}) = -\sum_i \langle \vec{F}_i^{ges}, \dot{\vec{r}}_i \rangle$ und

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \langle \underbrace{m \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{ges}}_{=0}, \dot{\vec{r}}_i \rangle = 0 .$$

$= 0$, da $\vec{r}_i(t)$ Newton (ii) genügt ! $\square$

<u>Keplerschen Gesetze, Newtons Gravitation, Körper im Zentralkraftfeld, Zweikörperproblem</u>

<u>Geo</u>zentrisches oder <u>helio</u>zentrisches Weltbild?

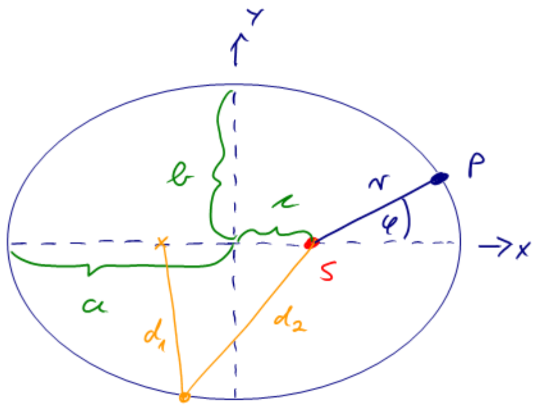
Diese seit Antike bis ins 17. Jhdt. kontrovers diskutierte Frage sollte nach Tycho Brahe (dän. Astronom, 1546 – 1601) durch Beobachtung geklärt werden.

→ 20 jährige Beobachtung der Planetenposition vor Fixsternhimmel mit hoher Genauigkeit ($\Delta\varphi \lesssim 1'-2'$; $1' = 1$ Bogenminute $= \frac{1}{60}$ Grad $\hat{=}$ $1/30$ Mond ⌀) an eigens dafür erbauten Observatorien.

Johannes Kepler (1571–1630) erhält nach Brahes Tod dessen Beobachtungsdaten und deduziert daraus die Bahnen der Planeten in Form der

Keplerschen Gesetze

1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.



- $d_1 + d_2 = 2a$
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- $r(\varphi) = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$

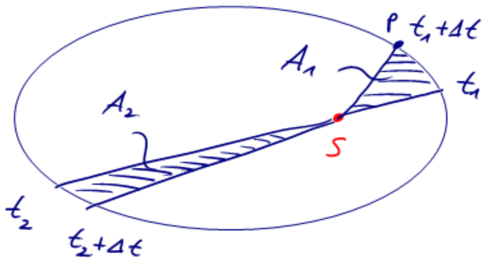
a : große Halbachse

b : kleine Halbachse

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$: Exzentrizität es gelten folgende Beziehungen: $\cdot \; a^2 = b^2 + e^2$

$\cdot \; p = (1 - \varepsilon^2)\, a$

2) <u>Flächensatz</u>



$$A_1 \overset{!}{=} A_2$$

Fahrstrahl $\overline{SP}$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3) Umlaufzeiten $T_1, \dots, T_9$ und große Halbachsen $a_1, \dots, a_9$ der Planeten genügen

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = c \;:\; \text{konstant!}$$