Warum folgen Planeten Keplers Gesetzen?

Newton: a) auch Himmelskörper folgen irdischen Mechanik

b) zwischen MPen der Massen m_1 und m_2 wirkt Gravitationskraft

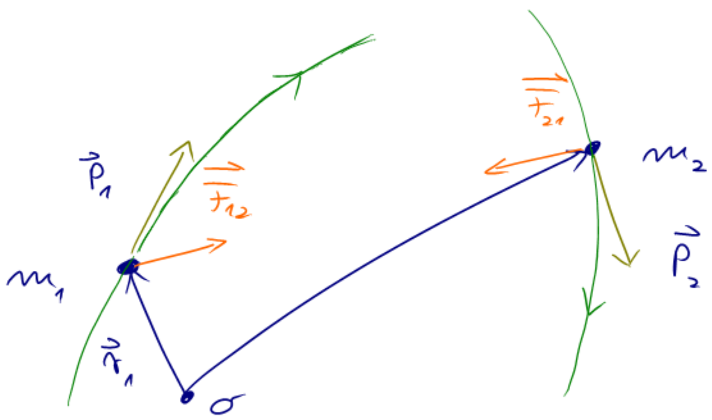
$$\vec{F}(\vec{r}_{12}) = -\frac{\alpha}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad (1)$$

wobei $\alpha \propto m_1 \cdot m_2$

[heute: $\alpha = G m_1 m_2, \quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$]

wir wollen zeigen: a) und b) implizieren Keplers Gesetze!

zu lösende Aufgabe: Zwei-Körper-Problem mit Gravitationskraft (1)



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1(t) = -\frac{\alpha}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}\hat{r}_{12}(t)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2(t) = -\frac{\alpha}{|\vec{r}_1(t)-r_2(t)|}\hat{r}_{21}(t)$$

zunächst vereinfachende Annahme für den Fall $m_1 \gg m_2$:
(z.B. m_1 = Sonnemasse $\gg$ Planetenmasse $= m_2$)

MP ruht in O, d.h. $\vec{r}_1(t) = \vec{0}$ und MP 2 am Ort $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_2$ erfährt Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_{21}(\vec{r})$

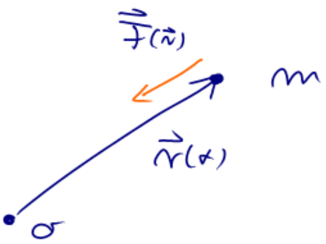
→ **Bewegung eines MP im isotropen Zentralkraftfeld**

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\,\hat{r}$$

- Betrag der Kraft hängt nur von $|\vec{r}|$ ab
- Kraftrichtung $\parallel \vec{r}$

z.B. 1) lineares Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r} \equiv -k\,|\vec{r}|\,\hat{r}$

2) Gravitationskraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -\dfrac{\alpha}{|\vec{r}|^2}\,\hat{r}$



Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Bahn $\vec{r}(t) = ?$

wir zeigen zuerst:

Der Drehimpuls $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ eines MPs im Zentralkraftfeld ist eine Erhaltungsgröße.

denn nach Drehimpulssatz $\dot{\vec{\ell}}(t) = \vec{M}^{ex}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t)) \underset{\vec{F}(\vec{r}(t)) \parallel \vec{r}(t)}{=} \vec{0}$;

→ $\vec{\ell}(t)$ konstant

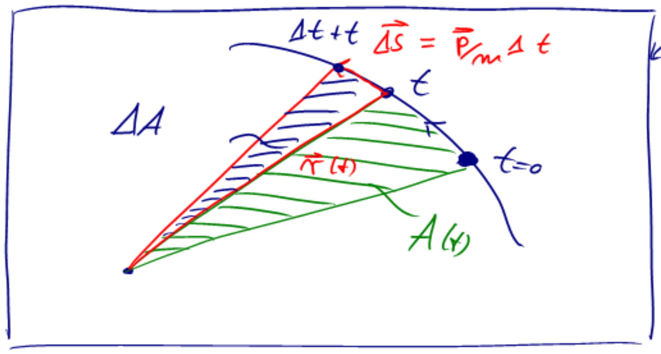
Folgerungen:

1) Bahn $\vec{r}(t)$ des MPs verläuft für alle Zeiten t in Ebene $\perp \vec{\ell}$ durch O

denn für alle t ist $\langle \vec{r}(t), \vec{\ell} \rangle$

$$= \langle \vec{r}(t), \vec{\ell}(t) \rangle = \langle \vec{r}(t), \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) \rangle \underset{\vec{r} \perp \vec{r} \times \vec{p}}{=} 0$$

2) Es gilt der Flächensatz: $\boxed{\frac{dA}{dt} = \text{konst.}}$



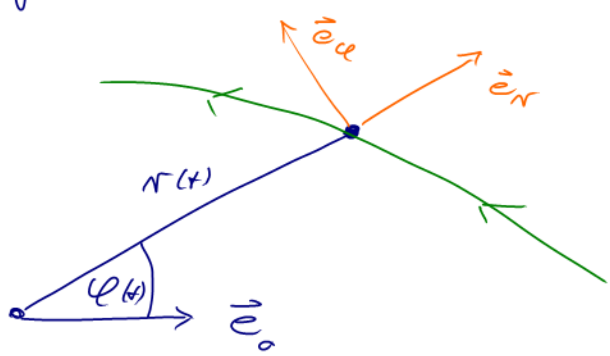
$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{\Delta s}|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\vec{p}}{m} \Delta t \right|$$

$$= \frac{1}{2m} \underbrace{|\vec{r} \times \vec{p}|}_{= \vec{\ell}} \Delta t$$

d.h. $\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2m} |\vec{\ell}(t)| = \text{konst.}$

Verlauf der Bahn $\vec{r}(t)$ in Bewegungsebene ermöglicht Bahnbeschreibung in Polarkoordinaten



$\odot \; \hat{\ell} \equiv \vec{e}_z$

$$\vec{r} \overset{!}{=} r \vec{e}_r \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\longrightarrow \quad \vec{\ell} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}} = m r^2 \dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{= \vec{e}_z}$$

insbes. $m r^2 \dot{\varphi} = |\vec{\ell}| \equiv \ell$ $\longrightarrow$

Azimuthalgleichung:

$$\boxed{\dot{\varphi}(t) = \frac{\ell}{m\, r(t)^2}}$$

Wir zeigen nun:

$\boxed{\text{Jedes isotrope Zentralkraftfeld ist konservativ!}}$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung!

ist $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\,\hat{r}$ und $U(r)$ Stammfkt. von $-f(r)$, so ist $U(|\vec{r}|)$ Potenzial von $\vec{F}$;

denn
$$-\operatorname{grad} U(|\vec{r}|) = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial r}(|\vec{r}|)}_{= f(|\vec{r}|)}\,\hat{r} = \vec{F}(\vec{r}) \quad \checkmark$$

Darstellung der Energie in Polarkoordinaten:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \;\rightarrow\; |\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

d.h.
$$E = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 + U(|\vec{r}|)$$
$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + U(r)$$

nach Azimuthalgl. ist $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{m r^2}$ und somit

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{\ell^2}{2 m r^2}}_{\text{Zentrifugal-Potenzial}} + \underbrace{U(r)}_{\text{eigentliches Potenzial}}}_{U_{eff}\text{, effektives Potenzial}}$$

mittels <u>effektivem Potenzial</u> $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$

also

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2(t) + U_{eff}(r(t))}$$

Differenzieren nach t führt wegen $\frac{dE}{dt}$ auf

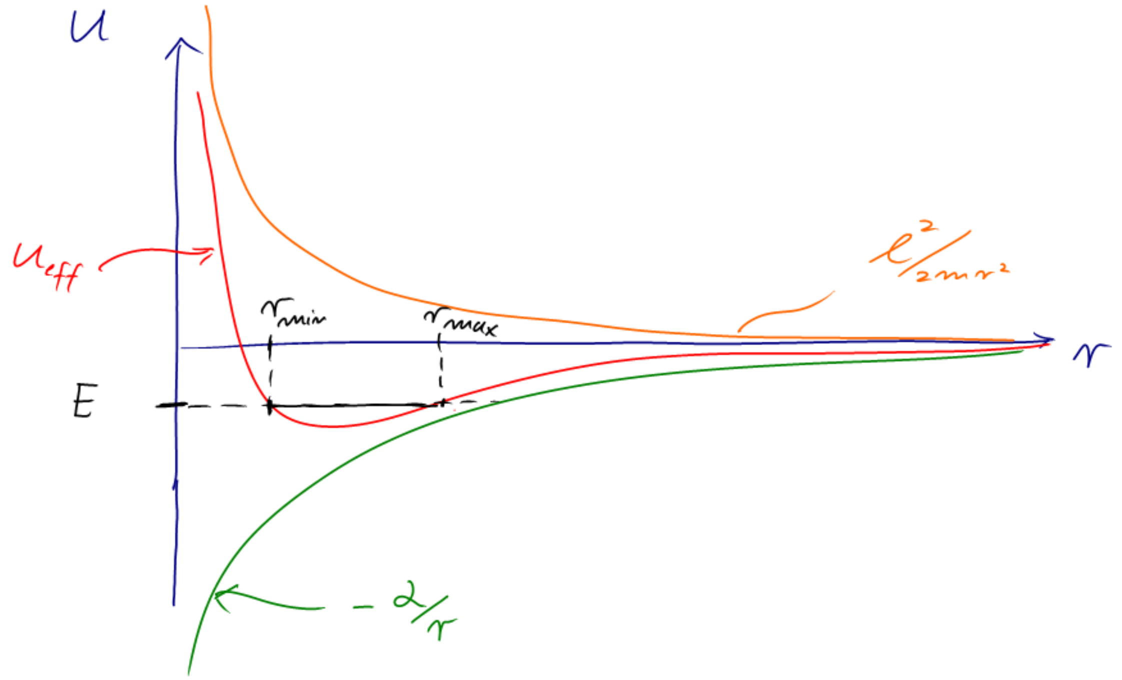
$$\boxed{m\ddot{r}(t) = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}(r(t))}$$

d.h. der Radius $r(t)$ des MP genügt 1D-Bewegungsgleichung eines 1D-Teilchen der Masse m unter <u>effektiver Kraft</u> $F_{eff} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}$ mit Potenzial U_{eff}

$\longrightarrow$ qualitative Analyse der Bahn durch Diskussion von U_{eff}!

<u>Beispiel</u>: $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} \quad \rightarrow \quad U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$$\rightarrow \quad U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$



d.h. für $\ell \neq 0$ und $E < 0$ $r(t)$ für alle Zeiten beschränkt durch

$$0 < r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$$

Drehimpulsbarriere $\ell^2/2mr^2$ verhindert "Absturz" des MPs ins Kraftzentrum