Vektoranalysis und Lineare Algebra

Inhalt:

- Differenzialoperatoren div, grad, rot, Δ und deren Anwendung in der Physik (Wiederholung)
- Partielle Differenzialgleichungen
- Lösungsmethoden
- Delta-Distribution
- Fourier-Transformation
- Lineare Abbildungen:

  Eigenwert, Eigenvektor, orthogonale und unitäre Abb.en
  Tensorprodukt,

- Tensorrechnung
- Funktionentheorie
- Differenzialformen

Literatur:

1) Arens, Hettlich, Karpfinger, Kockelkorn, Lichtenegger, Stachel: Mathematik (Spektrum)

2) Fischer, Kaul: Mathematik für Physiker 1, 2, 3 (Teubner Studienbücher)

3) Jänich: Vektoranalysis (Springer)

Wiederholung:

Differenzialoperatoren für Skalar- und Vektorfelder

$$f : \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{}{D}} \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} \mapsto f(\vec{r})$$

$$\vec{A} : D \to \mathbb{R}^3, \quad D \subset \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r})$$

(siehe Vorlesungen 24 - 29 Mathematische Methoden WS 17/18)

Gradient:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{r}) := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i} \vec{e}_i} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{r}) \end{pmatrix} \equiv \vec{\nabla} f$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

- "Richtung des stärksten Anstiegs von f"
- $\perp$ zu Niveauflächen f = konst.
- $\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle$

Divergenz ≡ Quellstärke:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) := \lim_{V \to 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

d.h. $\quad \operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

Rotation ≡ Wirbelstärke

Vektor $\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ bestimmt durch

$$\langle \hat{n}, \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})\rangle \overset{!}{=} \lim_{F\to 0} \frac{1}{|F|} \int_{\partial F} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$(\hat{F} = \hat{n})$$

$$\to \quad \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j(\vec{r})}{\partial x_i} \vec{e}_k$$

$$= \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$$

Laplace-Operator

$$\boxed{\Delta f := \operatorname{div}\operatorname{grad} f} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Hinweis: obige Differenzialoperatoren können auch direkt in <u>Zylinder-</u> und <u>Kugelkoordinaten</u> bestimmt werden (vgl. Vrlsgen 28 u. 29. M.M. WS 17/18)

Integralsätze der Vektoranalysis:

Gauß:

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_{V} \operatorname{div} \vec{A} \, d^3\vec{r}$$ (s. Vrlsg. 26)

Stokes:

$$\int_{\partial F} \vec{A} \, d\vec{l} = \int_{F} \operatorname{rot} \vec{A} \, d\vec{f}$$ (s. Vrlsg. 27)

Anwendungen in der Physik:

1) Elektrostatik: $\vec{E}$: elektr. Feld, ρ: Ladungsdichte

a) $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} \overset{!}{=} \rho/\varepsilon_0}$: "elektr. Ladungen sind die Quellen des elektr. Feldes"

(Gauß)

b) $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} \overset{!}{=} 0}$: "das elektrostatische Feld ist wirbelfrei"

$\Rightarrow$ elektrostatische Potenzial Φ

$\rightarrow \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$

mit a):

$$\boxed{\Delta \Phi = -\rho/\varepsilon_0}$$

2) <u>Wärmeleitung</u>:

Wärmeleitfähigkeit

- <u>Wärmestromdichte</u> $\vec{q} \overset{!}{=} -\lambda \operatorname{grad} T$ (Fourier)

- (Wärme) <u>Energiedichte</u> $u = \rho c T$; ρ: Massendichte
  c: spez. Wärmekap.

- Energieerhaltung: $\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = p$

externe Wärmeleistungsdichte

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T} + \frac{1}{\rho c} p$$

Wärmeleitungsgleichung

3) <u>Quantenmechanik</u>: Schrödinger-Gleichung eines freien Punktteilchens der Masse m:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r},t)$$

$\hat{=}$ Bewegungs-Gleichung der komplexen <u>Wellenfunktion</u>

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$(\vec{r},t) \mapsto \psi(\vec{r},t)$$

($\hat{=}$ Wärmeleitungsgleichung in <u>imaginärer</u> Zeit $\tau = it$)

4) <u>Wellenausbreitung</u>

(skalare) physikalische Größe $f(\vec{r},t)$ (z.B. Druck, Dichte) genüge

<u>Wellengleichung</u>

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \overset{!}{=} \Delta f}$$

wobei c Parameter der Dimension Geschwindigkeit

$\rightarrow$ $f(\vec{r},t)$ bildet <u>Wellen</u> der Ausbreitungsgeschwindigkeit c! (vgl. Übungen)

<u>explizit</u>:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad (f(x_1,x_2,x_3,t))$$

<u>eindimensional</u>: $f(x,t)$

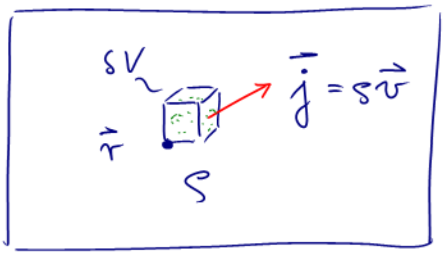
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

mittels <u>D'Alembert-Operator</u> $\boxed{\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta}$

$$\boxed{\Box f = 0}$$

Woher kommt die Wellengleichung?

z.B. für Schall ≡ Dichte-Druck-Welle in einem Gas:



$\rho(\vec{r},t)$: lokale Massendichte

$\vec{j}(\vec{r},t)$: lokale Massenstromdichte

$\vec{v}(\vec{r},t)$: mittlere lokale Geschwindigkeit

Massenerhaltung $\longrightarrow$ $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$ $$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{f} \qquad (*)$$

Newton: $$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\right)}_{\text{Impulsdichte}} = \vec{f}$$

Kraftdichte

Kraft auf Volumenelement bestimmt durch negativen Gradienten des Drucks p:

$$\vec{f} = -\operatorname{grad} p$$

im Falle eines einatomigen idealen Gases (z.B. Argon)

$$p\,V = N\,k_B T$$ (thermische Zustandsgleichung vgl. Exp-ph I)

d.h. $$p = \frac{\overbrace{m\,\delta N}^{=\rho}}{\delta V}\;\frac{k_B T}{m}$$; m = Atommasse also $\quad p = \frac{k_B T}{m} \cdot \varrho \quad$ und somit $\quad \vec{f} = -\frac{k_B T}{m} \operatorname{grad} \varrho$;

in (*) ergibt

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \frac{k_B T}{m} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varrho = \frac{k_B T}{m} \Delta \varrho$$

d.h. $\varrho(\vec{r}, t)$ genügt Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \Delta \varrho$$

mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $\boxed{c = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$.

$k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K

$T = 293$ K $\quad \rightarrow \quad c \approx 250\,m/s$

$m_{Ar} = 40 \cdot m_p = 40 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

Experiment: $c = 319 \frac{m}{s}$

ok...