n-dimensionale Fouriertransformation

$\hat{=}$ n-mal 1D F.T. :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{auch } \mathbb{C}, \text{ allg. VR } V)$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

1. F.-T. von f bzgl. x_1 :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \, \hat{f}_1(k_1, x_1, \dots) \, e^{ik_1 x_1} \qquad (1a)$$

mit $$\hat{f}_1(k_1, x_1, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, f(x_1, x_2, \dots) \, e^{-ik_1 x_1} \qquad (1b)$$

2. F.-T. von $\hat{f}_1(k_1, x_2, \dots)$ bzgl. x_2 :

$$\hat{f}_1(k_1, x_2, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \, \hat{f}_2(k_1, k_2, x_3, \dots) \, e^{ik_2 x_2} \qquad (2a)$$

mit $$\hat{f}_2(k_1, k_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \, \hat{f}_1(k_1, x_2, x_3, \dots) \, e^{-ik_2 x_2} \qquad (2b)$$

(2a) in (1a) und (1b) in (2b) führt auf

$$f(x_1, x_2, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \, \hat{f}_2(k_1, k_2, \dots) \, e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$$

mit $$\hat{f}_2(k_1, k_2, x_3, \dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, f(x_1, x_2, \dots) \, e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$$

in dieser Weise fahren wir bis zur n-ten F.T fort und erhalten :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_1}{2\pi}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_n}{2\pi}\,\hat{f}(k_1,\dots,k_n)\,e^{i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}$$

mit $\hat{f}(k_1,\dots,k_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dx_n\, f(x_1,\dots,x_n)\,e^{-i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}$

mit <u>n-dim. Wellenvektor</u> $\vec{k} = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{R}^n$

und Standardskalarprodukt $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+\dots+a_nb_n$

also

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{d^n\vec{k}}{(2\pi)^n}\,\hat{f}(\vec{k})\,e^{i\langle\vec{k},\vec{x}\rangle} \\ \text{mit}\quad \hat{f}(\vec{k}) &= \int_{\mathbb{R}^n}d^n\vec{x}\,f(\vec{x})\,e^{-i\langle\vec{k},\vec{x}\rangle}\end{aligned}}$$

<u>n-dim. Fourier(rück)transformation</u>

<u>Eigenschaften:</u>

1) $\widehat{f+g} = \hat{f}+\hat{g}\,,\quad \widehat{\lambda f} = \lambda\hat{f}$ (Linearität)

2) sei $f_{\vec{a}}(\vec{x}) := f(\vec{x}-\vec{a})$; dann

$$\widehat{f_{\vec{a}}}(\vec{k}) = e^{-i\langle\vec{k},\vec{a}\rangle}\,\hat{f}(\vec{k})$$

3) $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_\ell}}(\vec{k}) = ik_\ell\,\hat{f}(\vec{k})$;

$$\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_{e_1}\cdots\partial x_{e_m}}}(\vec{k}) = (i)^m k_{e_1}\cdots k_{e_m}\,\hat{f}(\hat{k})$$

4)

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g} \qquad \text{(Faltungssatz)}$$

$$\hookrightarrow \quad f*g(\vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n\vec{y}\; f(\vec{y})\, g(\vec{x}-y)$$

insbesondere für $n=3$; $\vec{x} \equiv \vec{r}$:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F.T.}} \begin{pmatrix} i k_1 \\ i k_2 \\ i k_3 \end{pmatrix} \equiv i\vec{k}$$

$$\longrightarrow \qquad \widehat{\operatorname{grad} f}(\vec{k}) \equiv \widehat{\vec{\nabla} f}(\vec{k}) = i\vec{k}\,\hat{f}(\hat{k})$$

$$\widehat{\operatorname{div}\vec{A}}(\vec{k}) \equiv \widehat{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}(\vec{k}) = i\vec{k}\cdot\hat{\vec{A}}(\hat{k})$$

$$\widehat{\operatorname{rot}\vec{A}}(\vec{k}) \equiv \widehat{\vec{k}\times\vec{A}}(\vec{k}) = i\vec{k}\times\hat{\vec{A}}(\vec{k})$$

$$\widehat{\Delta f}(\vec{k}) \equiv \widehat{(\vec{\nabla})^2 f}(\vec{k}) = -|\vec{k}|^2\,\hat{f}(\vec{k})$$

(vergleiche Übungen)

<u>Anwendungsbeispiel</u>: Wärmeleitung in 3D: $T(\vec{r},t)$ genügt

Wärmeleitungsgleichung $\quad \dfrac{\partial T}{\partial t} = a\,\Delta T$

Problem a): gegeben $T(\vec{r},0)$; bestimme $T(\vec{r},t)$ für $t>0$!

F. T. der Wärmeleitungsgl. bzgl. $\vec{r}$ führt auf lin. DGL in t:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\vec{k},t) = -a|\vec{k}|^2 \hat{T}(\vec{k},t)$$

$$\longrightarrow \quad \hat{T}(\vec{k},t) = \hat{T}_0(\vec{k})\, e^{-a|\vec{k}|^2 t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{T(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \hat{T}_0(\vec{k})\, e^{-a|\vec{k}|^2 t + i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}}$$

wobei $\hat{T}_0(\vec{k}) = \int d^3\vec{r}\; T(\vec{r},0)\, e^{-i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}$

z.B. $T(\vec{r},0) = \vartheta\,\delta(\vec{r}) \longrightarrow \hat{T}_0(\vec{k}) = \vartheta$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{T(\vec{r},t)}} = \vartheta \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \underbrace{e^{-a|\vec{k}|^2 t + i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}}_{=\, e^{-a k_1^2 t + i k_1 x_1}\, e^{-a k_2^2 t + i k_2 x_2}\, e^{-a k_3^2 t + i k_3 x_3}}$$

$$= \vartheta \prod_{j=1}^{3} \underbrace{\int \frac{dk_j}{2\pi}\, e^{-a k_j^2 t + i k_j x_j}}_{=\, \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x_j^2/4at}} = \underline{\underline{\frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi a t}^{\,3}}\, e^{-|\vec{r}|^2/4at}}}$$

$\longrightarrow$ <u>3D-Wärmeleitungskern</u> $\Gamma(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-|\vec{r}|^2/4at}$

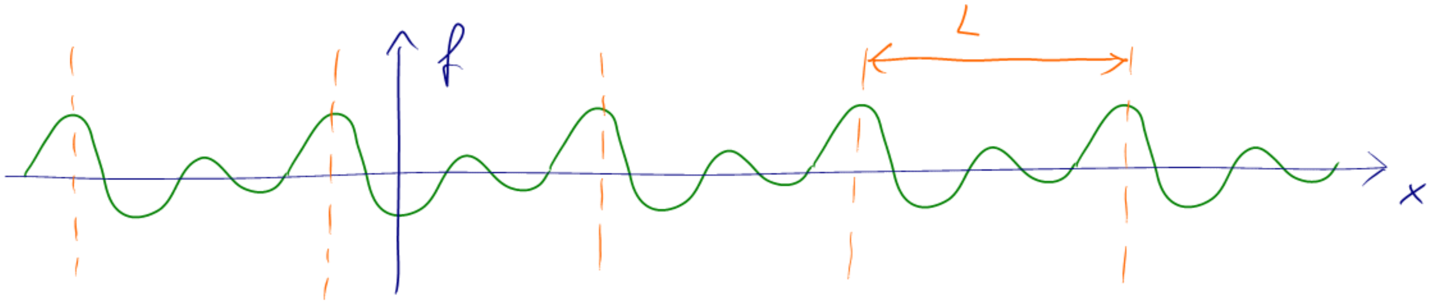
$$\longrightarrow \quad T(\vec{r},0) \xrightarrow{t} T(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,'\; T(\vec{r}\,',0)\, \Gamma(\vec{r}-\vec{r}\,',t).$$

Fourierreihe einer periodischen Funktion

$f(x)$ sei periodisch mit Periode L; d.h.

$$f(x+L) = f(x) \quad \text{für alle } x$$

kurz: $f(x)$ ist L-periodisch



ein vollständiges Funktionensystem der L-period. Fkten erhalten wir durch Restriktion von $\{\chi_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ auf L-periodische χ_k:

$$\boxed{\chi_k(x+L) \overset{!}{=} \chi_k(x)} \iff e^{ik(x+L)} \overset{!}{=} e^{ikx}$$

$$\iff \boxed{e^{ikL} = 1} \iff \boxed{kL \overset{!}{=} 2\pi n \,;\; n\in\mathbb{Z}}$$

d.h. $$\boxed{\{\chi_{k_n}\}_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{2\pi}{L}\cdot n}$$

ist ein vollst. Fktensystem der L-period. Fkten.

d.h. eine (hinreichend glatte) L-period. Fkt. $f(x)$ kann als Linearkombination der χ_{k_n} dargestellt werden:

$$(*) \qquad \boxed{f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k_n)\, e^{ik_n x}} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\cdot n$$

Fourierreihendarstellung der L-period. Fkt f

Bestimmung der Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k_n)\ (\equiv \hat{f}_n)$

mittels Skalarprodukt für L-period. Fkten $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f^*(x)\, g(x)}$$

(linear, symmetrisch und positiv ✓)

bzgl. dieses Skalarprodukts ist $\{\chi_{k_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem; d.h. $\langle \chi_{k_n}, \chi_{k_m}\rangle = \delta_{n,m}$!

$n = m$: $\quad |\chi_{k_n}|^2 \equiv \langle \chi_{k_n}, \chi_{k_n}\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_n x}\, e^{ik_n x} = 1$ ✓

$n \neq m$: sei $m = n + \ell$; $\ell \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, dann

$$\langle \chi_{k_n}, \chi_{k_m}\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_n x}\, e^{ik_{n+\ell} x} = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i\underbrace{(k_{n+\ell}-k_n)}_{=\frac{2\pi}{L}(n+\ell-n)} x}$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i\frac{2\pi\ell}{L}x} = \frac{1}{\cancel{L}}\left.\frac{e^{i\frac{2\pi\ell}{L}x}}{i\frac{2\pi\ell}{\cancel{L}}}\right|_0^L = \frac{-i}{2\pi\ell}\Big(\underbrace{e^{i2\pi\ell}}_{=1} - 1\Big) = 0 \quad ✓$$

folglich $\langle \chi_{k_m}, f\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k_n)\, \overbrace{\langle \chi_{k_m}, \chi_{k_n}\rangle}^{=\delta_{mn}} = \hat{f}(k_m)$

und somit $\quad \hat{f}(k_m) \equiv \langle \chi_{k_m}, f \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_m x} f(x)$

$\longrightarrow$ Def. / Satz

Die Fourierreihe einer L-periodischen Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) \overset{!}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k_n)\, e^{ik_n x}$$

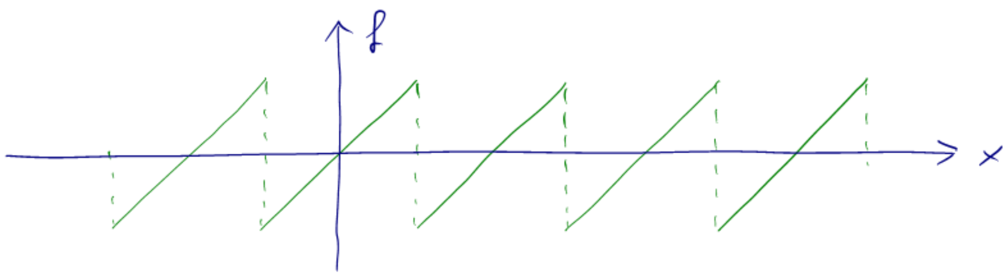
mit $k_n = \frac{2\pi}{L} n$ und Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}_n \equiv \hat{f}(k_n) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-ik_n x} .$$

Beispiel: „Sägezahn-Funktion" $f(x)$ def. durch

1.) $\quad f(x) = x \quad$ für $x \in \left]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$

2.) $\quad f(x+L) \overset{!}{=} f(x) \quad$ für alle x



Berechnung der Koeffizienten $\hat{f}(k_n)$:

$n=0$: $\qquad \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\hat{f}(k_0)}} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, x = 0$

$n \neq 0$: $k_n = \frac{2\pi}{L} \cdot n \neq 0$

$$f(k_n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \; x \, e^{-i k_n x} = \frac{i}{L} \frac{\partial}{\partial k} \int_{-L/2}^{L/2} dx \; e^{-ikx} \Big|_{k=k_n}$$

$$= \frac{i}{L} \frac{\partial}{\partial k} \frac{2}{k} \sin(kL/2) \Big|_{k=k_n} = \frac{2i}{L} \left(\frac{L}{2} \frac{\cos(k_n L/2)}{k_n} - \frac{\sin(k_n L/2)}{k_n^2} \right)$$

$$\underset{k_n = \frac{2\pi}{L} n}{=} \quad i \frac{\cos \pi n}{\frac{2\pi}{L} n} - \frac{2i}{L} \frac{1}{k_n^2} \underbrace{\sin \pi n}_{= 0} = i \frac{L}{2\pi} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

d. h.

$$\boxed{f(x)} \overset{!}{=} \frac{iL}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^n}{n} e^{i \frac{2\pi}{L} n x}$$

$$= \frac{iL}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (-1)^n \underbrace{\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{L} n x}}{n} - \frac{e^{-i\frac{2\pi}{L} n x}}{n} \right)}_{= \frac{2i}{n} \sin \frac{2\pi}{L} n x}$$

$$\boxed{= -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2\pi n/L \cdot x)}{2\pi n/L}}$$

für $L = 2\pi$:

$$\boxed{f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots - \ldots \right)}$$

⚠ Vorsicht : Gleichheit nur in stetigen Pkten von $f(x)$!