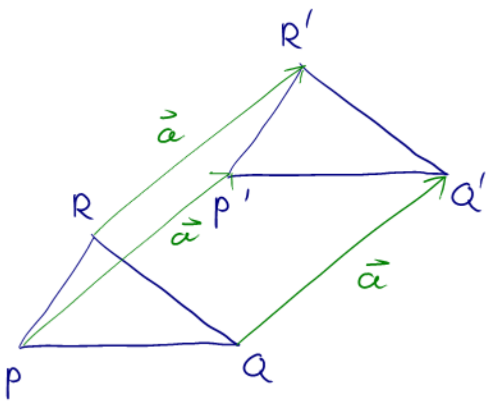
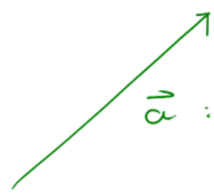
Lineare Algebra

- Vektorraum, Basis, Komponentendarstellung bzgl. Basis (Wiederholung)
- Lineare Abbildung
  - Matrixdarstellung bzgl. Basen, Bild, Kern, Dimensionsformel, Verkettung, Inversion ...
  - Eigenvektor/-raum, Eigenwert
  - orthogonale und unitäre lin. Abb./Matrix
    $\rightarrow$ " " " " " Gruppe

Vektorraum (vgl. Mathematische Meth. WS 17/18, Vlg. 1 u. 2)

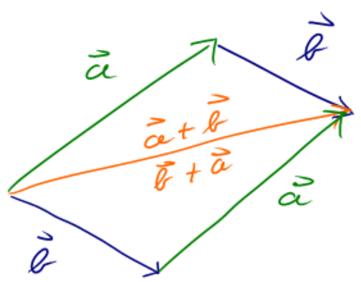
"Prototyp" eines Vektors : Parallelverschiebung im Raum



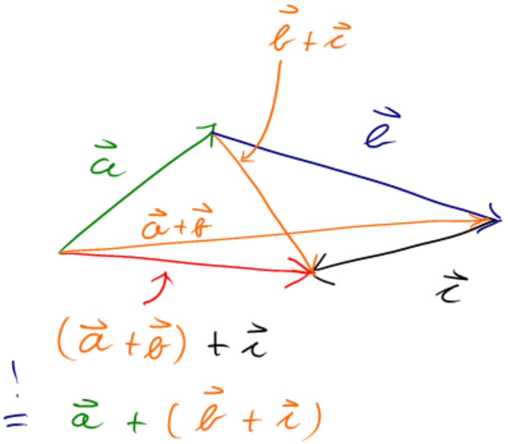


$\vec{a}$: Verschiebungsvektor

Addition von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: verschiebe erst um $\vec{a}$, dann um $\vec{b}$



offenbar $\vec{a}+\vec{b} \overset{!}{=} \vec{b}+\vec{a}$



offenbar $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \overset{!}{=} \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

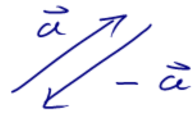
$\rightarrow$ <u>Vektoraddition</u> „+" mit Eigenschaften

(A1) <u>Assoziativität</u>: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(A2) Existenz des <u>Nullvektors</u> $\vec{0}$: $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$

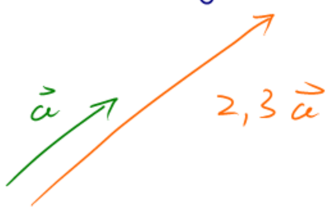
(A3) Existenz des <u>inversen Vektors</u> $-\vec{a}$ zu $\vec{a}$:

$\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$



(A4) <u>Kommutativität</u>: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

Dehnung / Stauchung um Faktor λ:



$\rightarrow$ <u>Skalarmultiplikation</u> $\underset{\text{Skalar}}{\lambda}, \underset{\text{Vektor}}{\vec{a}} \longmapsto \underbrace{\lambda\vec{a}}_{\text{Vektor}}$

mit Eigenschaften

(S1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

mathematische Objekte mit Vektoraddition gemäß A1 – A4 und Skalarmultiplikation gemäß S1 – S4 fassen wir als Vektoren eines Vektorraums auf:

Vektorraum $\equiv$ Menge V mit

Vektoraddition
$$V \times V \to V$$
$$\vec{a}, \vec{b} \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$
gemäß A1 – A4

und Skalarmultiplikation
$$\mathbb{K} \times V \to V$$
$$\lambda, \vec{a} \mapsto \lambda \vec{a}$$

gemäß S1 – S4;

falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Vektorraum reell
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: " " komplex;

Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren.

- Eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ mit Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ist per def. der Vektor

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n \in V$$

- $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ sind linear unabhängig g.d.w.

$$\left(\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \vec{0} \right)$$

(m.a.W.: linear unabhängige Vektoren können nur trivial zu $\vec{0}$ kombiniert werden)

- $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ bilden ein Erzeugendensystem von V (sind vollständig) g.d.w. $\longrightarrow$

jeder Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination der $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dargestellt werden kann:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \quad \text{für geeignete } \lambda_i$$

- <u>linear unabhängige</u> und zugleich <u>vollständige</u> <u>Vektoren</u> $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine <u>Basis</u> von V

<u>Satz</u>

- jede Basis eines VRs besteht hat dieselbe Zahl an Vektoren, genannt die <u>Dimension</u> des VRs
- $\vec{v} \in V$ besitzt bezüglich Basis $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ <u>eindeutige</u> Darstellung

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \dots + v_n \vec{b}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B$$

die <u>Komponenten von $\vec{v}$ bzgl. B</u>, $v_1, \dots, v_n$, fassen wir als <u>Komponentenvektor</u> ${}_B\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ auf:

$${}_B\vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

⌈ <u>beachte</u>: $\vec{v} \in V$, ${}_B\vec{v} \in \mathbb{K}^n$! ⌋

<u>Lineare Abbildung</u>

V und W seien VRe (beide reell ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), oder beide komplex ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)). Die <u>Abbildung</u> $\longrightarrow$

$$A : V \longrightarrow W$$
$$\vec{v} \longmapsto A(\vec{v})$$

ist <u>linear</u> g. a. w.

$$\text{(i)} \quad A(\vec{v} + \vec{u}) = A(\vec{v}) + A(\vec{u})$$

$$\text{(ii)} \quad A(\lambda \vec{v}) = \lambda A(\vec{v}) \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

Bemerkungen

1) <u>Notation</u>: Argumentklammer „( )" werden bei linearen Abben. i.d.R. <u>nicht</u> verwendet; statt $A(\vec{v})$ also nur $\underline{A\vec{v}}$.

2) $\mathcal{L}(V, W) :=$ <u>Menge aller linearen Abben von $V \to W$</u> bildet <u>Vektorraum</u> mit

<u>Addition</u> $$(A+B)\vec{v} := A\vec{v} + B\vec{v}$$

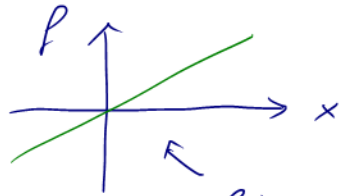
<u>Skalarmultiplikation</u> $$(\lambda A)\vec{v} := \lambda(A\vec{v})$$

3) A linear $\Longrightarrow A\vec{0} = \vec{0}$

$\ulcorner$ denn $A\vec{0} = A(0\vec{0}) = 0 A\vec{0} = \vec{0}$ $\lrcorner$

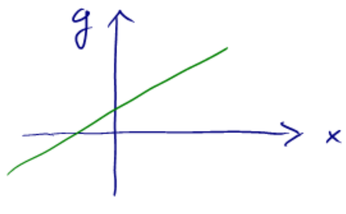
Beispiele:

1) $V = W = \mathbb{R}$: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$



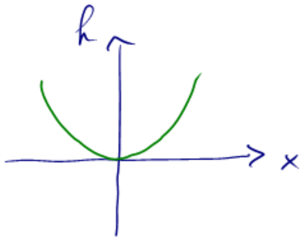
<u>linear!</u>

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, $b \neq 0$



<u>nicht</u> linear!

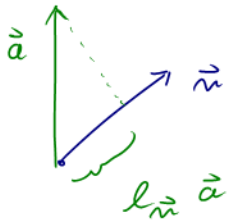
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto x^2$



nicht linear!

2) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ normierter Vektor

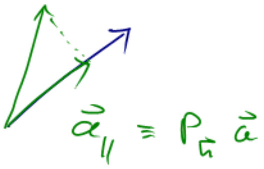
a) Länge der Projektion auf $\vec{n}$:



$$l_{\vec{n}}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$$

b) Parallelanteil bzgl. $\vec{n}$:

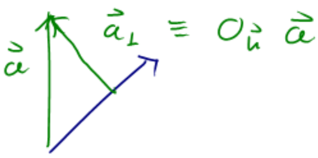
$$P_{\vec{n}}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle\, \vec{n}$$



c) <u>identische Abbildung</u>:

$$\mathbb{1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{a} \mapsto \vec{a}$$

d) Orthogonalanteil bzgl. $\vec{n}$:

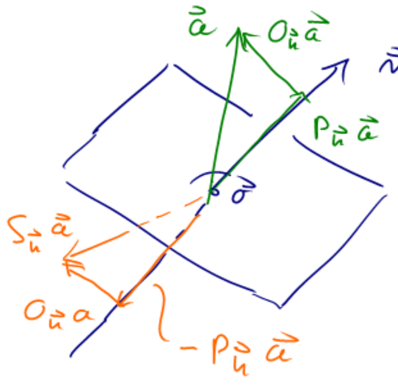


$$O_{\vec{n}}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{a} \mapsto \vec{a} - P_{\vec{n}}\,\vec{a}$$

wegen $O_{\vec{n}}\,\vec{a} = \vec{a} - P_{\vec{n}}\,\vec{a} = (\mathbb{1} - P_{\vec{n}})\,\vec{a}$ also

$$O_{\vec{n}} = \mathbb{1} - P_{\vec{n}}$$

e) Spiegelung an Ebene $\perp \vec{n}$ durch $\vec{0}$:



$$S_{\vec{n}} = O_{\vec{n}} - P_{\vec{n}}$$

$$\underset{d)}{=} (\mathbb{1} - P_{\vec{n}}) - P_{\vec{n}}$$

d.h. $$\underline{\underline{S_{\vec{n}} = \mathbb{1} - 2P_{\vec{n}}}}$$

3) $V \equiv P_k :=$ Menge der ganzrationalen Funktionen (Polynome) maximal k-ten Grades

$$= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k ;\ a_i \in \mathbb{R} \}$$

<u>Ableitung</u> $$\frac{\partial}{\partial x} : P_k \longrightarrow P_{k-1}, \quad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

bekanntlich <u>linear</u>!

<u>Matrixdarstellung</u> einer linearen Abbildung

$$A : V \longrightarrow W$$

bzgl. Basis $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von V

und Basis $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ von W

$\longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
V \ni \vec{v} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, leftrightarrow, "B"'] & \vec{w} \equiv A\vec{v} \in W \arrow[d, leftrightarrow, "G"] \\
K^n \ni {}_B\vec{v} \arrow[r, mapsto, "2"] & {}_G\vec{w} \in K^m
\end{tikzcd}$$

Wir suchen den direkten Weg von ${}_B\vec{v}$, den Komponenten von $\vec{v}$ bzgl. B, nach ${}_G\vec{w}$, den Komponenten von $\vec{w} = A\vec{v}$ bzgl. G !

1. Satz

A ist vollständig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$:

↳ $\vec{A}_1 := A\vec{b}_1$, $\vec{A}_2 := A\vec{b}_2$, $\dots$, $\vec{A}_n := A\vec{b}_n$

d.h. $\boxed{\vec{A}_i := A\vec{b}_i}$ (*)

[denn dann

$$A\vec{v} = A\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i\right) \overset{A \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i A\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{A}_i$$]

2. Komponentendarstellung der Basisbilder $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$ bzgl. Basis G :

$$\boxed{\vec{A}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ji}\, \vec{c}_j} \quad (**)$$

→ $m \cdot n$ eindeutig bestimmte Koeffizienten A_{ji} erlauben dann direkte Berechnung von ${}_C\vec{w} = {}_C(A\vec{v})$ durch ${}_B\vec{v}$ gemäß:

$$A\vec{v} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{A}_i \overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ji} \vec{c}_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i \right) \vec{c}_j \equiv \vec{w} \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{m} w_j \vec{c}_j$$

$$\overset{!}{=}$$

$$\boxed{w_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = {}_C\vec{w} \qquad {}_B\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

<u>Darstellungsmatrix der Abb. A bzgl. B und C:</u>

$${}_CA_B := (A_{ji})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

- per Konstruktion sind die Spaltenvektoren von ${}_CA_B$ genau die (Komponenten der) Bilder der Basisvektoren, daher

$${}_CA_B = \left({}_C(A\vec{b}_1), {}_C(A\vec{b}_2), \dots, {}_C(A\vec{b}_n) \right)$$

- (1) schreiben wir kurz als

$${}_C\vec{w} \overset{!}{=} {}_CA_B \cdot {}_B\vec{v}$$

n-Vektor

m-Vektor $\qquad$ m×n Matrix

Beispiel:

$$\frac{\partial}{\partial x}: P_2 \to P_1$$
$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

$B = (1, x, x^2)$ Basis von P_2

$C = (1, x)$ Basis von P_1

• Bilder der Basisvektoren unter $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial 1}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

• in Komponentendarstellung bzgl. C:

$${}_C\left(\frac{\partial 1}{\partial x}\right) = {}_C(0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \; ; \quad {}_C\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = {}_C(1) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \; ; \quad {}_C\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}\right) = {}_C(2x) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\to \quad {}_C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial x}$ für $f(x) = 5x^2 + x$:

$${}_Bf = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \to \quad {}_C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = {}_C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_B {}_Bf = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot 1 + 10 \cdot x = 1 + 10x$ ✓