Weitere Grundbegriffe der lin. Algebra:

Untervektorraum, Spann (= lineare Hülle), Bild und Kern einer lin. Abb., Dimensionsformel(n)

Def.: Untervektorraum

Eine Teilmenge W eines Vektorraums V ist Untervektorraum (UVR) von V g. d. w.

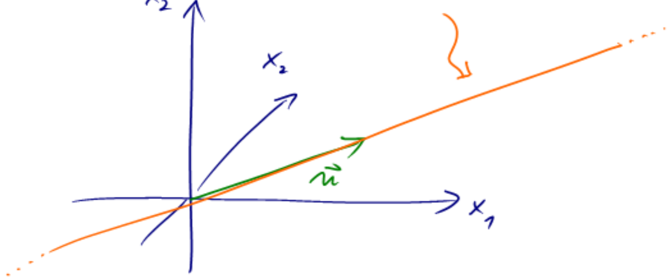
(i) $W \neq \emptyset$ (leere Menge)

(ii) W abgeschlossen unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation; d.h. mit $w, w' \in W$ auch $w + w' \in W$ und $\lambda w \in W$

Beispiele

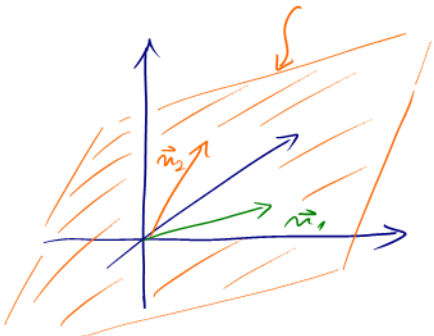
1) $V = \mathbb{R}^3$; Gerade $\parallel \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ durch $\vec{0}$,

$$G_{\vec{u}} = \{ \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R} \},$$ ist UVR von V



2) $V = \mathbb{R}^3$; Ebene $\parallel \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ durch $\vec{0}$,

$$E_{\vec{u}_1, \vec{u}_2} = \{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$ ist UVR von V



3) $A: V \to W$ lineare Abbildung;

$K := \{ v \in V \mid Av = \vec{o} \}$ ("Kern von A" s.u.)

ist UVR von V; denn: $A\vec{o} = \vec{o} \leadsto \vec{o} \in K$; d.h. $K \neq \emptyset$ ✓

Seien $v_1, v_2 \in K$; d.h. $Av_1 = \vec{o}$ und $Av_2 = \vec{o}$

$\to \vec{o} = Av_1 + Av_2 \overset{A \text{ linear}}{=} A(v_1 + v_2)$; d.h. $v_1 + v_2 \in K$ ✓

$\vec{o} = \lambda A v_1 \underset{A \text{ linear}}{=} A(\lambda v_1)$; d.h. $\lambda v_1 \in K$ ✓

Bemerkungen / Def.:

Im Folgenden seien W und W' UVRe eines VRs V

1) W Vektorraum

2) $\dim W \leq \dim V$; falls $\dim W = \dim V$ dann $W = V$.

3) $\{\vec{o}\}$ und V sind UVRe von V

4) $\boxed{W \cap W' \text{ ist UVR von } V}$

5) $W \cup W'$ ist i.d.R. kein UVR von V

6) Def: Die Summe von W und W' ist der UVR

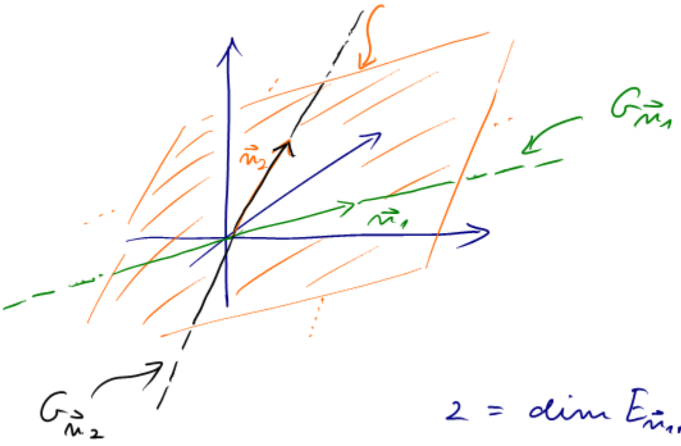
$$\boxed{W + W' := \{ w + w' \mid w \in W,\ w' \in W' \}}$$

7) Dimensionsformel

$$\boxed{\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')}$$

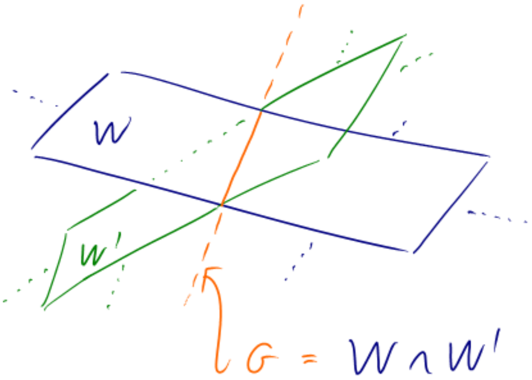
Beispiele

1) $E_{\vec{n}_1,\vec{n}_2} \overset{!}{=} G_{\vec{n}_1} + G_{\vec{n}_2} \neq G_{\vec{n}_1} \cup G_{\vec{n}_2}$



$$2 = \dim E_{\vec{n}_1\vec{n}_2} \overset{!}{=} \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim G_{\vec{n}_1}} + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim G_{\vec{n}_2}} - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\underbrace{\dim(G_{\vec{n}_1} \cap G_{\vec{n}_2})}} \quad \checkmark$$

2)



$W + W' = \mathbb{R}^3$

$$3 = \dim W + W' \overset{!}{=} \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim W} + \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim W'} - \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim G}$$

Beweise zu den Bemerkungen:

1) 2) 3) klar;

zu 4): $\vec{o} \in W, \vec{o} \in W' \rightarrow \vec{o} \in W \cap W'$, also $W \cap W' \neq \emptyset$; ✓

Sind $u, v \in W \cap W'$ so $u, v \in W \rightarrow u+v, \lambda u \in W$

und $u, v \in W' \underset{\substack{\uparrow \\ W, W' \text{ VRe.}}}{\rightarrow} u+v, \lambda u \in W'$

d.h. $u+v, \lambda u \in W \cap W'$ ✓

zu 5): siehe Beispiel 1)

zu 6) $W + W'$ ist UVR da offenbar $\vec{o} \in W + W'$

(und damit nicht leer) und mit $u_1 = w_1 + w_1' \in W + W'$

und $u_2 = w_2 + w_2' \in W + W'$ (wobei $w_i \in W$, $w_i' \in W'$)

auch $u_1 + u_2 = (\underbrace{w_1 + w_2}_{\in W}) + (\underbrace{w_1' + w_2'}_{\in W'}) \in W + W'$

und $\lambda u_1 = \lambda w_1 + \lambda w_1' \in W + W'$.

zu 7) Sei $\dim W = n$, $\dim W' = n'$, $\dim W \cap W' = k$

$(a_1, \ldots, a_k)$ sei Basis von $W \cap W'$;

Erweiterung mit geeigneten $b_1, \ldots, b_{n-k} \in W \setminus (W \cap W')$

bzw. $c_1, \ldots, c_{n'-k} \in W' \setminus (W \cap W')$ ergibt

Basis $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k})$ von W bzw.

Basis $(a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_{n'-k})$ von W'.

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B} := (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}, c_1, \ldots, c_{n'-k}) \\ \text{Basis von } W + W'; \end{array}\right\} (*)$$

denn dann $\dim W + W' = \#\text{Vektoren in } \mathcal{B} = k + n - k + n' - k$

$= n + n' - k = \dim W + \dim W' - \dim W \cap W'$

zu (*) : (i) $\underline{\mathcal{B} \text{ ist Erzeugendensystem von } W + W'}$:

$$W + W' \ni v = w + w' = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j b_j}_{= w \in W} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i' a_i + \sum_{l=1}^{n'-k} \mu_l' c_l}_{= w' \in W'} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \lambda_i') a_i + \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j b_j + \sum_{l=1}^{n'-k} \mu_l' c_l \quad \checkmark$$

(ii) <u>B ist linear unabhängig:</u>

gelte $\sum_i \lambda_i a_i + \sum_j \mu_j b_j + \sum_l \nu_l c_l = 0$; (1)

dann ist zu zeigen, dass alle Koeff. λ_i, μ_j, ν_l verschwinden; setze dazu

$$a := \sum_i \lambda_i a_i + \sum_j \mu_j b_j \overset{!}{\in} W \qquad (2)$$

dann wegen (1) auch

$$a = -\sum_l \nu_l c_l \overset{!}{\in} W'$$

d.h. $a \in W \cap W'$; somit auch $a = \sum_i \tilde{\lambda}_i a_i$ für geeignete $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k$. Wegen Eindeutigkeit der Darstellung von $a \in W$ bzgl. $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k})$ und (2) also

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i \qquad \text{für } i = 1, \dots, k$$

und $$\mu_j = 0 \qquad \text{für } j = 1, \dots, n-k .$$

Somit nach (1)

$$\sum \lambda_i a_i + \sum \nu_l c_l \overset{!}{=} 0$$

was wegen lin. Unabhängigkeit von $(a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_{n'-k})$ auf $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \nu_1 = \dots = \nu_{n'-k} = 0$ hinaus läuft; damit lin. Unabhängigkeit von B gezeigt.

(i), (ii) $\longrightarrow$ B Basis von $W + W'$.

Definition: Spann (= lineare Hülle)

M sei Teilmenge eines VRs V. Der Spann von M (die lineare Hülle von M) ist der UVR

$$\mathrm{Span}\, M = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N};\ a_i \in M;\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

= „Menge aller möglichen Linearkombinationen der Elemente aus M"

Beispiele: 1) $W + W' = \mathrm{Span}(W \cup W')$

2) $(b_1, \dots, b_n)$ Basis von V; dann $V = \mathrm{Span}(b_1, \dots, b_n)$

alternative Charakterisierung

$\mathrm{Span}\, M$ = kleinster UVR der M enthält

$= \bigcap (U \text{ UVR von } V : M \subset U)$ ✓

Def.: Bild und Kern einer linearen Abbildung

$$A : V \to W$$

Bild von A: $\mathrm{Im}\, A := \{ Av \mid v \in V \} \subset W$

Kern von A: $\mathrm{Ker}\, A := \{ v \in V \mid Av = 0_W \} \subset V$

$(\equiv A^{-1}(\{0_W\})$, Urbild von $\{0_W\})$

Satz:

a) $\mathrm{Im}\, A$ und $\mathrm{Ker}\, A$ sind UVRe von W bzw. V

b) es gilt die Dimensionsformel:

$$\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A}$$

c) $\boxed{A \text{ injektiv} \iff \operatorname{Ker} A = \{0_V\}}$

einfache Folgerung aus b) und c):

ist $\dim V = \dim W$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A surjektiv

(ii) A injektiv

(iii) A bijektiv

zu a): • mit $w_1 \equiv A v_1$, $w_2 \equiv A v_2 \in \operatorname{Im} A$ auch

$w_1 + w_2 = A v_1 + A v_2 \overset{A \text{ linear}}{=} A(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V}) \in \operatorname{Im} A$ und

$\lambda w_1 = \lambda A v_1 \overset{A \text{ linear}}{=} A(\overbrace{\lambda v_1}^{\in V}) \in \operatorname{Im} A$; zudem

$0_W = A 0_V \in V$ und damit $V \neq \emptyset$.

• sind $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} A$ so ist $A v_1 = A v_2 = 0_W$; somit

$0_W = A v_1 + A v_2 = A(v_1 + v_2) \rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} A$,

ebenso $0_W = \lambda A v_1 = A(\lambda v_1) \rightarrow \lambda v_1 \in \operatorname{Ker} A$;

$0_V \in \operatorname{Ker} A \rightarrow \operatorname{Ker} A \neq \emptyset$.

zu b): $(b_1, \dots, b_e)$ sei Basis von $\operatorname{Ker} A \subset V$,

$(b_1, \dots, b_e, u_1, \dots, u_m)$ sei Basis von V;

$$\rightsquigarrow \quad V = \mathrm{Span}(b_1, \ldots, b_l) + \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m)$$
$$= \operatorname{Ker} A + \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m)$$

d.h. $\quad \dim V = l + m = l + m - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} A \cap \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m))}_{= 0\,!}$

d.h.

$$\operatorname{Ker} A \cap \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m) = \{0_V\} \qquad (1)$$

es genügt zu zeigen:

$$(Au_1, \ldots, Au_m) \text{ ist Basis von } \operatorname{Im} A \qquad (2)$$

denn hieraus folgt $\quad \dim V = l + m = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$.

zu (2): (i) $\underline{Au_1, \ldots, Au_m \text{ sind linear unabhängig}}$:

sei $\quad \lambda_1 Au_1 + \cdots + \lambda_m Au_m = 0_W$; dann wegen Linearität auch $A(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m) = 0_W$ und somit $u := \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m \in \operatorname{Ker} A$; offenbar auch $u \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m)$ und damit wegen (1) $u = 0_V$; wegen lin. Unabhängigkeit der $u_1, \ldots, u_m$ dann $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. ✓

(ii) $\underline{\mathrm{Span}(Au_1, \ldots, Au_m) \overset{!}{=} \operatorname{Im} A}$:

$$\operatorname{Im} A = \mathrm{Span}(\underbrace{Ab_1}_{= 0_W}, \ldots, \underbrace{Ab_l}_{= 0_W}, Au_1, \ldots, Au_m) \, !$$
$$\overset{!}{=} \mathrm{Span}(Au_1, \ldots, Au_m) \quad ✓$$

(i)+(ii) $\Longrightarrow$ $(Au_1, \ldots, Au_m)$ Basis von $\operatorname{Im} A$.

Beweis von c) als Übung.

Satz: Die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung ist linear.

Beweis als Übung.

Problem: ${}_C A_B$ sei Matrixdarstellung der bij. lin. Abb.

$A : V \to W$ bzgl. Basen B, C von V bzw. W;

bestimme Matrix der Umkehrabb. $A^{-1} : W \to V$

bzgl. C und B: ${}_B(A^{-1})_C = ?$

$\to$ Matrixinversion (siehe nächste Vorlesung)