Matrizen und deren Verknüpfungen

$m \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$: $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C})$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ $\quad$ i: Zeilenindex, j: Spaltenindex

m: Zeilendimension

n: Spaltendimension

Menge aller $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$: $\quad M(m \times n, \mathbb{K})$

Matrixaddition und -skalarmultiplikation:

$A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{K}$

dann $\quad A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$\qquad \lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

d.h. $M(m \times n)$ ist Vektorraum

Standardmatrixbasis:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \text{j-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow \text{i-te Zeile}$$

$i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ $\quad$ d.h. $\underline{\dim M(m \times n) = m \cdot n}$

n - dim. <u>Einheitsmatrix</u>:

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \in M(\underline{\underline{n}} \times \underline{\underline{n}})$$

<u>Matrixmultiplikation</u>

$$M(m \times n) \times M(n \times k) \longrightarrow M(m \times k)$$

$$(a_{ij}), (b_{jl}) \longmapsto \left(c_{il} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \right)$$

<u>Beispiele</u>:

- $$\begin{array}{ccc} 2\times 3 & 3 \times 4 & 2 \times 4 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccc} 2\times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>beachte</u>: $\quad M(n \times 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^n$

<u>Rechenregeln</u>:

- $(A+B)C = AC + BC$
- $A(B+C) = AB + AC$

$\Big\}$ Distributivität

- $A(BC) = (AB)C \equiv ABC \qquad$ Assoziativität
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

⚠ Vorsicht: i. A. $\boxed{AB \neq BA}$

z. B.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kommutator von A, B ($\in M(n \times n)$):

$$[A, B] := AB - BA$$

k-te Potenz einer Matrix $A \in M(n \times n)$ („A quadratisch"):

$$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots A}_{k \text{ mal}} \qquad (k > 0)$$

$$A^0 := \mathbb{1}_n$$

$\longrightarrow$ ganzrationale Matrixfunktion k-ten Grades:

$$f: M(n \times n) \longrightarrow M(n \times n)$$

$$A \longmapsto f(A) = a_0 A^0 + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k$$

$\xrightarrow{k \to \infty}$ analytische Matrixfunktion $f(A) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell A^\ell$

Beispiel: Matrixexponentialfunktion:

$$\boxed{\exp A \equiv e^A := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell}$$

Transposition einer Matrix

$$(\ldots)^T : M(m \times n) \longrightarrow M(n \times m)$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \longmapsto A^T := (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$$

mit $b_{ij} := a_{ji}$

d.h. Transposition vertauscht genau Spalten mit Zeilen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & \vdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}^T = (v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_m)$$

Anwendung: Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^m$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i w_i \overset{!}{=} \underset{(1 \times m)}{(v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_m)} \cdot \underset{(m \times 1)}{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}} = v^T w$$

d.h.: $\boxed{\langle v, w \rangle = v^T w}$

Rechenregeln:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

$m \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$ $\triangleq$ lin. Abb. $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

mittels <u>Isomorphismus</u> ($\equiv$ bijektive lineare Abb.)

$$\Phi : \mathcal{M}(m \times n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

$$M \xmapsto{\Phi} L_M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad v \mapsto Mv$$

$${}_{B_m}A_{B_n} \xleftarrow{\Phi^{-1}} A$$

$B_m = (e_1, \dots, e_m)$ Standardbasis des $\mathbb{K}^m$

$B_n = (e_1, \dots, e_n)$ " " " $\mathbb{K}^n$

${}_{B_m}A_{B_n}$: Darstellungsmatrix von A bzgl. B_n, B_m

Φ offenbar linear und für $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$$\Phi^{-1}(\Phi(M)) = {}_{B_m}(\Phi(M))_{B_n} = \left((Me_j)_i \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$= (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = M \quad \checkmark$$

<u>beachte</u>:

- $\Phi(\mathbb{1}_n) = id_{\mathbb{K}^n}$
- $\Phi(M \cdot N) = \Phi(M) \circ \Phi(N)$

Bemerkung: oft wird nicht zwischen Matrix A und lin. Abb. $\phi(A)$ unterschieden; d.h. statt $\Phi(A)$ schreibt man nur A.

Rechenregeln: $A, B \in M(n\times n)$ seien invertierbar

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\quad$ (denn $B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}_n}B = B^{-1}B = \mathbb{1}_n$)
- $(A^{-1})^{-1} = A$ $\quad$ (denn $AA^{-1} = \mathbb{1}_n$)
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\quad$ (denn aus $\mathbb{1}_n = AA^{-1}$ folgt durch Transposition

$$\mathbb{1}_n \overset{!}{=} (AA^{-1})^T \overset{!}{=} \underbrace{(A^{-1})^T}_{(A^T)^{-1}} A^T \;)$$

Matrixinversion mittels Gauß-Verfahren

benötigt elementare Zeilenumformungen (Spaltenumformungen) einer Matrix:

(Z1) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ

(Z2) Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

(Z3) Vertauschung von i-ter und j-ter Zeile

(alternativ können elementare Spaltenumformgen verwendet werden:

(S1) Multiplikation der i-ten Spalte mit λ

(S2) Addition des λ-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte

(S3) Vertauschung von i-ter und j-ter Spalte)

<u>Gaußverfahren</u>: Forme zu invertierende Matrix A mittels elementaren <u>Zeilenumformungen</u> (alt.: <u>Spalten</u>-umformungen) zur Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$ um; dieselben Umformungen in gleicher Reihenfolge an $\mathbb{1}_n$ (statt A) ausgeführt ergibt <u>inverse Matrix</u> A^{-1}.

<u>Beispiel</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} A^{-1}$$

<u>Test</u>:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Warum funktioniert's?

Zeilenumformungen (Z1–3) können durch (links-) Multiplikation mit Matrizen dargestellt werden:

$$A \xrightarrow{Z1,\,i,\,\lambda} A' = S_i(\lambda)\, A \quad \text{mit} \quad S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

$$A \xrightarrow{Z2,\,i,\,j,\,\lambda} A' = Q_i^j(\lambda)\, A \quad \text{mit} \quad Q_i^j(\lambda) = \mathbb{1}_n + \lambda E_{ij}$$

$$A \xrightarrow{Z3,\,i,\,j} A' = P_i^j\, A \quad \text{mit} \quad P_i^j = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \end{array}$$

nach n geeigneten Umformungen $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \{ S_i(\lambda), Q_i^{j'}(\lambda'), P_{i''}^{j''} \}$ erhalten wir (linke Seite)

$$A_n = U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 A \overset{!}{=} \mathbb{1}_n$$

d.h. $\qquad U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 = A^{-1}$;

dieselben Umformungen angewandt auf $\mathbb{1}_n$ (rechte Seite) ergibt $\quad U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 \mathbb{1}_n$, also genau A^{-1}.

<u>Hinweis</u>: wird das Gauß-Verfahren auf eine <u>nicht</u>-invertierbare Matrix angewandt, erscheint nach hinreichend vielen Umformungen eine 0-Zeile oder 0-Spalte.