Menge der <u>invertierbaren</u> $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$:

$$GL(n, \mathbb{K}) := \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) \mid A \text{ invertierbar} \},$$

bildet bzgl. Matrixmultiplikation eine <u>Gruppe</u>, die sog. <u>allgemeine, lineare Gruppe</u> ( GL = general linear )

<u>Definition</u>: <u>Gruppe</u>

Eine Menge $M$ mit einer Verknüpfung ("Multiplikation")

$$\text{„}\cdot\text{"} : M \times M \longrightarrow M$$
$$a, b \longmapsto a \cdot b$$

bildet eine <u>Gruppe</u>, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

(g1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in M$
(Assoziativität)

(g2) es existiert ein $e \in M$ ("Einselement")
derart, dass für alle $a \in M$

$$e \cdot a = a$$

(g3) für jedes $a \in M$ existiert ein $a^{-1} \in M$
("inverses Element zu $a$") derart, dass

$$a^{-1} a = e$$

Falls $a \cdot b \overset{!}{=} b \cdot a$ für alle $a, b \in M$ so heißt die Gruppe <u>abelsch</u>

<u>Bemerkung</u>: in jeder Gruppe gilt mit (g1–g3) zudem

(g2') $\qquad a \cdot e = a$

(g3') $\qquad a \cdot a^{-1} = e$

$\ulcorner$ zuerst zeigen wir (g3'):

$$a \cdot a^{-1} \underset{g2,g3}{=} \left( (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} \right) \cdot a \cdot a^{-1} \underset{g1}{=} (a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot a^{-1}$$

$$\overset{g3}{=} (a^{-1})^{-1} \cdot (e \cdot a^{-1}) \overset{g2}{=} (a^{-1})^{-1} a^{-1} \overset{g3}{=} e$$

und hiermit (g2'):

$$a \cdot e \overset{g3}{=} a \cdot (a^{-1} \cdot a) \overset{g1}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot a \overset{g3'}{=} e \cdot a$$

$$\overset{g2}{=} a$$

$\lrcorner$

$GL(n, \mathbb{K})$ bildet Gruppe weil

0) mit $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$ auch $A \cdot B \in GL(n, \mathbb{K})$

1) Matrixprodukt ist assoziativ

2) wegen $A = \mathbb{1}_n A$ für alle $A \in GL(n, \mathbb{K})$ ist $\mathbb{1}$ Einselement

3) mit $A$ auch $A^{-1}$ invertierbar und somit in $GL(n, \mathbb{K})$

$GL(n, \mathbb{K})$ für $n \geq 2$ <u>nicht</u> abelsch:

z. B. $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Rang einer Matrix / Abbildung

**Rang einer lin. Abb. $A: V \to W$:**

$$\text{rang}\, A := \dim \text{Im}\, V$$

**Rang einer $m \times n$ Matrix $M$:**

$$\begin{aligned}
\text{rang}\, M &:= \text{rang}\, \phi(M) \\
&= \dim \text{Im}\, \phi(M) \\
&= \dim \text{Span}(s_1, s_2, \dots, s_n) \\
&= \text{Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von } M \\
&=: \text{Spaltenrang von } M
\end{aligned}$$

$s_i$ = $i$-ter Spaltenvektor von $M$

alternativ: $\widetilde{\text{rang}}\, M := \text{Zeilenrang von } M$

$:=$ Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von $M$

**Satz**

$$\text{Zeilenrang} \overset{!}{=} \text{Spaltenrang} \equiv \text{Rang}$$

$$\widetilde{\text{rang}}\, A \overset{!}{=} \text{rang}\, A$$

**Beweis**: sei $A \equiv \phi(A): \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (also $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$)

$$\underset{\substack{\| \\ n}}{\dim \mathbb{K}^n} \overset{!}{=} \underbrace{\dim \text{Im}\, A}_{\substack{\| \\ \text{rang}\, A}} + \underbrace{\dim \text{Ker}\, A}_{\substack{\| \; ?? \\ n - \widetilde{\text{rang}}\, A}} \qquad (1)$$

wir zeigen (im wesentlichen): $\dim \ker A \overset{!}{=} n - \widetilde{\operatorname{rang}} A$

Sei $\ell = \widetilde{\operatorname{rang}} A$; $z_1, \dots, z_m$ seien die Zeilenvektoren von $A$;

$$* \left\{ \begin{array}{l} \text{O.B.d.A seien } z_1, \dots, z_\ell \text{ lin. unabhängig; d.h. } z_{\ell+1}, \dots, z_m \\ \text{sind Linearkombinationen von } z_1, \dots, z_\ell \text{;} \end{array} \right.$$

$$\rightsquigarrow \quad x \in \ker A \iff Ax = 0 \iff \begin{pmatrix} z_1^T \\ z_2^T \\ \vdots \\ z_m^T \end{pmatrix} x = 0$$

$$\overset{(*)}{\iff} \begin{pmatrix} z_1^T \\ \vdots \\ z_\ell^T \end{pmatrix} x = 0$$

$$\iff x \in W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_\ell \text{ ; wobei } W_i = \ker z_i^T$$

d.h. $\quad \ker A \overset{!}{=} W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_\ell$

nun ist $\dim W_i = n-1$ und damit

$$\dim \ker A = \dim (W_1 \cap \dots \cap W_\ell) \overset{!}{\geq} n - \ell = n - \widetilde{\operatorname{rang}} A \qquad (2)$$

$(\ell-1) \times$ Dimensionsformel: $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim U+W}_{\leq n}$
$\geq \dim U + \dim W - n$

nach (1) also

$$n - \operatorname{rang} A = \dim \ker A \overset{(2)}{\geq} n - \widetilde{\operatorname{rang}} A$$

d.h. $\quad \widetilde{\operatorname{rang}} A \geq \operatorname{rang} A$

wegen $\operatorname{rang} A = \widetilde{\operatorname{rang}} A^T$ und $\widetilde{\operatorname{rang}} A = \operatorname{rang} A^T$ aber auch

$\operatorname{rang} A \geq \widetilde{\operatorname{rang}} A$ und damit $\operatorname{rang} A = \widetilde{\operatorname{rang}} A$.