Basiswechsel, Ähnlichkeitstransformation, Eigenwert, -vektor, -raum, -basis, Diagonalisierbarkeit

im Folgenden ist immer Definitions-VR $\equiv$ Werte-VR :

lin. Abb. $A : V \to V \equiv$ <u>Endomorphismus</u> auf V

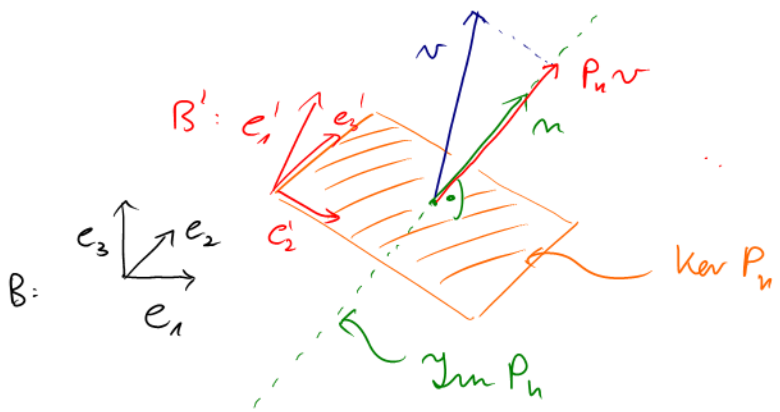
$\equiv$ (linearer) <u>Operator</u> auf V

Menge der Endomorphismen auf V : $\underline{\mathcal{L}(V)}$ (statt $\mathcal{L}(V,V)$)

<u>beachte</u> : $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \cong \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$

Zur Motivation von <u>Basiswechsel</u> und <u>Diagonalisierung</u> betrachte :

Projektion auf $n \in \mathbb{R}^3$: $P_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; v \mapsto \langle n, v \rangle n$



bzgl. $B = (e_1, e_2, e_3)$ sei $\quad {}_B n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$$\to \quad {}_B {P_n}_B = \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3 n_3 \end{pmatrix} \quad \left(= {}_B n \cdot {}_B n^T\right)$$

„bessere" Basis $B' = (e_1', e_2', e_3')$ sei so gewählt, dass

$e_1' = n$ und $e_2', e_3' \perp n$

$$\to \quad {}_{B'} n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{B'} {P_n}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zeigt: durch geeignete Wahl der Basis kann sich Darstellungsmatrix einer lin. Abb. erheblich vereinfachen!

→ Problem 1) Transformation der Darstellungsmatrix ${}_B A_B$ nach ${}_{B'}A_{B'}$ bei Wechsel der Basis B nach B'.

Problem 2) bestimme Basis B' so, dass ${}_{B'}A_{B'}$ möglichst einfach; idealerweise so, dass ${}_{B'}A_{B'}$ diagonal, d.h.

$$ {}_{B'}A_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} $$

(nicht immer möglich!)

zuerst 1):

Koordinaten- und Darstellungsmatrixtransformation durch Basiswechsel

Ausgangbasis: $B = (b_1, \dots, b_n)$

→ $V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v_i \, b_i$

↳ Koordinaten bzgl. B: ${}_B v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$\updownarrow$?

neue Basis: $B' = (b_1', \dots, b_n')$

→ $v = \sum_j v_j \, b_j'$

↳ Koordinaten bzgl. B': ${}_{B'} v = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

gelte: $\boxed{b_j' = \sum_i s_{ij} b_i}$ (1)

$\rightarrow$ Basiswechselmatrix $S = (s_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$

dann

$$\sum_i v_i b_i \overset{!}{=} v \overset{!}{=} \sum_j v_j' b_j' \overset{(1)}{=} \sum_j v_j' \sum_i s_{ij} b_i = \sum_i \left(\sum_j s_{ij} v_j' \right) b_i$$

$$\rightarrow \quad v_i = \sum_j s_{ij} v_j'$$

d.h. genauer: $\boxed{{}_B v = S \, {}_{B'} v \quad \text{bzw.} \quad {}_{B'} v = S^{-1} \, {}_B v}$ (2)

zur Bestimmung von ${}_{B'}A_{B'}$ aus ${}_B A_B$ betrachte bel. $v \in V$:

$${}_{B'}A_{B'} \, {}_{B'}v = {}_{B'}(A v) \overset{(2)}{=} S^{-1} \, {}_B(Av) = S^{-1} \, {}_B A_B \, {}_B v = \left(S^{-1} \, {}_B A_B \, S\right) S^{-1} \, {}_B v =$$

$$\overset{(2)}{=} \left(S^{-1} \, {}_B A_B \, S\right) {}_{B'} v$$

d.h. $\boxed{{}_{B'}A_{B'} = S^{-1} \, {}_B A_B \, S}$

Def.:

- A ähnlich B $:\Longleftrightarrow$ $A = S^{-1} B S$ für geeignete(n) invertierbare(n) Matrix / Endomorph. S

  $(A \sim B)$

- Ähnlichkeitstransformation mittels S: $A \mapsto A' = S^{-1} A S$

Determinante (vgl. Mathemat. Methoden VL. 6–8)

einer $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

Spaltenvektoren

$$\det A \equiv \Omega_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

orientiertes n-Volumen des Spats mit Kanten $a_1, \ldots, a_n$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}\sigma$$

Leibniz

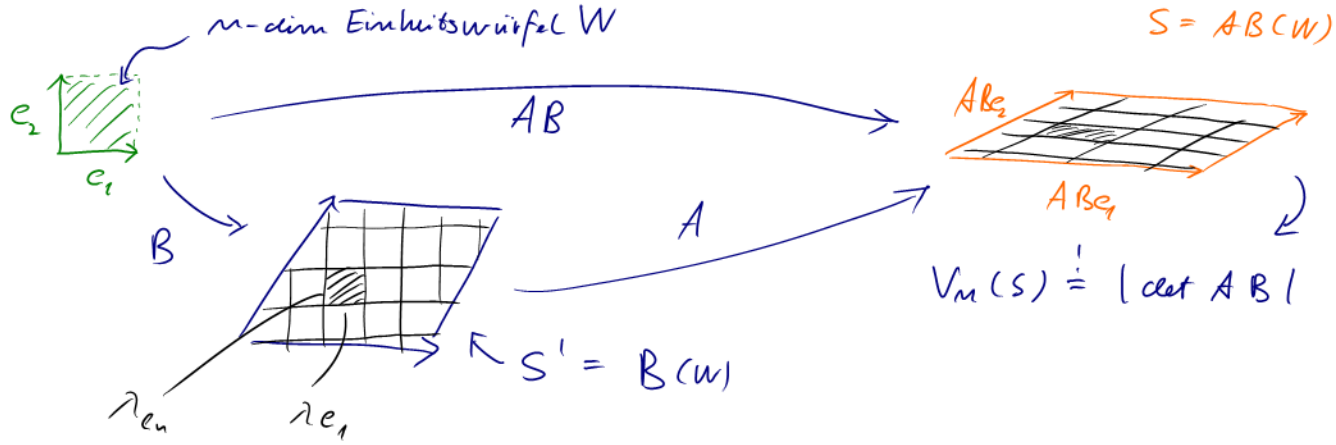
Eigenschaften:

- Spalten- und Zeilenlinearität
- Vorzeichenwechsel bei Zeilen (Spalten)-Vertauschung
- $\det A = \det A^T$
- $\operatorname{rang} A \lneq n \Rightarrow \det A = 0$

Multiplikationssatz

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

statt eines formalen Beweises (siehe z.B. G. Fischer, Lineare Algebra) hier ein anschaulicher Beweis von $|\det AB| = |\det A \cdot \det B|$:



offenbar $\quad \bullet \; S = A(S')$

$\bullet \; V_n(S') = |\det B| \overset{!}{=} N_\lambda \cdot \lambda^n$

$$\Rightarrow \quad V_n(S) = N_\lambda \cdot |\det(\lambda^n A)| = N_\lambda \lambda^n |\det A| = |\det B|\,|\det A|$$

$$\overset{\|}{|\det AB|}$$

$\boxtimes$

Folgerungen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & A \text{ invertierbar} \Longrightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \\ 2) & A \text{ invertierbar} \Longleftrightarrow \det A \neq 0 \\ 3) & A \sim B \Longrightarrow \det A = \det B \end{array}}$$

zu 1) $\quad A^{-1}A \overset{!}{=} \mathbb{1}_n \quad \rightarrow \quad \det A^{-1} \det A \overset{!}{=} \det \mathbb{1}_n = 1$

d.h. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

zu 2) $\bullet$ A <u>nicht</u> invertierbar $\Longrightarrow$ $\operatorname{rang} A \lneq n$ $\Longrightarrow$ $\det A = 0$

$\bullet$ A invertierbar $\Longrightarrow$ $\mathbb{1}_n = A^{-1}A$ $\Longrightarrow$ $1 = \det A^{-1} \cdot \det A$

d.h. $\det A \neq 0$!

zu 3) $\quad A \sim B$, d.h. $A = S^{-1}BS$ und daher

$$\det A = \det(S^{-1}BS) = \det S^{-1} \det B \det S \overset{1)}{=} \det B.$$

$\rightarrow$ <u>Determinante eines Endomorphismus $A \in \mathcal{L}(V)$:</u>

$\boxed{\det A := \det{}_B A_B}$; <u>unabhängig</u> von gewählter Basis B.