allg. Thema: **Wann ist ein Endomorphismus diagonalisierbar?**

Satz

Die Eigenvektoren $u_1, \dots, u_\ell$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ eines Endom. $A \in \mathcal{L}(V)$ sind linear unabhängig.

Folgerung

Ist $\ell = \dim V$ so ist V diagonalisierbar.

⌜ Folgerung klar, da $\dim V$ viele lin. unab. Vektoren $u_1, \dots, u_{\ell = \dim V}$ Basis bilden.

Beweis des Satzes per Induktion über ℓ:

$\ell = 1$: $u_1 \neq 0_V$ (sonst kein EV) und damit lin. unabh.

$(\ell - 1) \to \ell$:

gelte $0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_\ell u_\ell$ $\quad \cdot \lambda_\ell$ $\quad A \cdot$ $\quad (A u_i \stackrel{!}{=} \lambda_i u_i)$

$$\text{I} \quad 0 = \alpha_1 \lambda_\ell u_1 + \alpha_2 \lambda_\ell u_2 + \dots + \alpha_\ell \lambda_\ell u_\ell$$

$$\neq \qquad \neq \qquad \stackrel{!}{=}$$

$$\text{II} \quad 0 = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha_\ell \lambda_\ell u_\ell$$

$$\hookrightarrow \text{I} - \text{II}: \quad 0 = \alpha_1 \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_1)}_{\neq 0} u_1 + \alpha_2 \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_2)}_{\neq 0} u_2 + \dots + \alpha_{\ell-1} \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1})}_{\neq 0} u_{\ell-1} + 0_V$$

nach I.V. $u_1, \dots, u_{\ell-1}$ lin. unabhängig und damit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\ell-1} = 0$; wegen $u_\ell \neq 0_V$ aber auch $\alpha_\ell = 0$ und damit $u_1, \dots, u_\ell$ lin. unabhängig. ⌟

Was geschieht wenn $\ell \lneq \dim V$?

einfache Beispiele:

1) Drehung um e_3, Winkel α im $\mathbb{R}^3$:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- besitzt nur den Eigenwert 1, also $\ell = 1 \overset{!}{\lneq} \dim \mathbb{R}^3$
- nicht diagonalisierbar!

2) $$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ besitzt ebenfalls nur EW 1,

also auch hier $\ell = 1 \overset{!}{\lneq} \dim \mathbb{R}^n$

- aber $\mathbb{1}_n$ diagonal!

zur Klärung ein Lemma und ein Satz:

Lemma

λ sei Eigenwert von $A \in \mathcal{L}(V)$ der Vielfachheit μ (d.h. λ ist μ-fache Nullstelle von $P_A(t)$) und Eigenraum E_λ, dann gilt:

$$\boxed{\mu \geq \dim E_\lambda}$$

Satz

$\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ seien die Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ mit Vielfachheiten $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ und Eigenräumen $E_1, \dots, E_\ell$; dann gilt:

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} & (i) \quad \sum_i \mu_i = \dim V \\ \text{und} & \\ & (ii) \quad \mu_i = \dim E_i \text{ für alle } i = 1, \dots, \ell \end{array}\right\} \iff A \text{ diagonalisierbar}}$$

Beweis des Lemmas: Sei $r = \dim E_\lambda$ und $(b_1, \dots, b_r)$ eine Basis des UVR $E_\lambda \subset V$; insbes. also $A b_i = \lambda b_i$.
Ergänze $(b_1, \dots, b_r)$ durch geeignete $e_1, \dots, e_{n-r}$ $(n = \dim V)$ zu Basis $B = (b_1, \dots, b_r, e_1, \dots, e_{n-r})$. Dann ${}_BA_B$ offenbar der Gestalt

$$
{}_BA_B = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ & & & \lambda \\ \vdots & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix}}_{r} & A e_1, \; A e_2 \cdots A e_{n-r} \end{array} \right)
$$

$$
\longrightarrow \quad P_A(t) = (\lambda - t)^r \cdot Q(t) \quad \longrightarrow \quad \mu \geq r = \dim E_\lambda .
$$

könnte auch Nullstelle λ besitzen!

Beweis des Satzes:
Offenbar $E_i \cap E_j = \{0_V\}$ für $i \neq j$, deshalb impliziert (i) und (ii):

$$
\dim(E_1 + E_2 + \dots + E_\ell) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_\ell \overset{(ii)}{=} \sum \mu_i \overset{(i)}{=} \dim V
$$

mit Basen $B_i = (b_1^{(i)}, \dots, b_{\mu_i}^{(i)})$ von E_i ist dann

$$
B = (b_1^{(1)}, \dots, b_{\mu_1}^{(1)}, b_1^{(2)}, \dots, b_{\mu_2}^{(2)}, \dots, b_1^{(\ell)}, \dots, b_{\mu_\ell}^{(\ell)})
$$

Eigenbasis von A; d.h. A diagonalisierbar.

Falls A diagonalisierbar zeigt man sehr leicht (i) und (ii)

wesentlich stärkere Aussagen zur Diagonalisierbarkeit möglich, wenn es ein Skalarprodukt gibt $\longrightarrow$ nächstes Thema:

Euklidische und unitäre Vektorräume, orthogonale und unitäre Endomorphismen, Adjunktion, selbstadjungierte Endomorphismen

Erinnerung: (euklidisches) Skalarprodukt eines reellen VRs V

$$\equiv \text{ Abb. } \langle \cdot\cdot\cdot , \cdot\cdot\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$u, v \mapsto \langle u, v \rangle$$

mit Eigenschaften

1) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

   $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (Linearität im 2. Faktor)

2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (Symmetrie)

3) für $u \neq 0$: $\langle u, u \rangle > 0$ (Positivität)

- VR mit derartigem SP besitzt „euklidische Geometrie" mittels

  Norm (≡ Länge): $|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$

  Orthogonalität: $u \perp v \;:\Longleftrightarrow\; \langle u, v \rangle = 0$

  ⋮

  Cauchy-Schwarz-Ugl.: $|\langle u, v \rangle| \leq |u|\,|v|$

reeller VR mit eukl. SP $\langle , \rangle$ ≡ euklidischer Raum

Bsp.: $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

$$= a^T b$$

Für einen komplexen VR lässt sich eine sehr ähnliche „unitäre Geometrie" mittels eines sog. hermiteschen SP ein-führen:

↪ nach Ch. Hermite, fr. Mathematiker

hermitesches (auch: unitäres) Skalarprodukt eines komplexen VRs V

$$\equiv \quad \text{Abb.} \quad \langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$u, v \longmapsto \langle u, v \rangle$$

mit Eigenschaften

1) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (Linearität im 2. Faktor)

2) $\boxed{\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*}$ (Symmetrie)

3) für $u \neq 0_V$: $\langle u, u \rangle > 0$ (Positivität)

beachte: • 1) und 2) impliziert sog. „anti-Linearität" im 1. Faktor:

$$\boxed{\langle \lambda u, v \rangle = \lambda^* \langle u, v \rangle}$$

[denn $\langle \lambda u, v \rangle \overset{2)}{=} \langle v, \lambda u \rangle^* \overset{1)}{=} (\lambda \langle v, u \rangle)^* = \lambda^* \langle v, u \rangle^* \overset{2)}{=} \lambda^* \langle u, v \rangle$]

• $\langle u, u \rangle \overset{2)}{=} \langle u, u \rangle^*$; d.h. $\langle u, u \rangle$ reell.

„unitäre Geometrie" erklärt durch

Norm / Länge: $|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Orthogonalität: $u \perp v \; :\Leftrightarrow \; \langle u, v \rangle = 0$

$\vdots$

$\rightarrow$ <u>Cauchy-Schwarz-Ugl.:</u> $\quad |\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$

komplexer VR mit hermiteschem SP $\langle \ldots, \ldots \rangle$ $\equiv$ <u>unitärer Raum</u>

<u>Bsp</u>: $\quad \mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$\langle a, b\rangle_{\mathbb{C}^n} := \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i \equiv (a^T)^* b$$

<u>Orthonormalbasis</u> (ONB)

Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eines eukl./unitären Raums V ist <u>Orthonormalbasis</u> g.d.w. b_i normiert und paarweise orthogonal; d.h. genau

$$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} \quad .$$

<u>Berechnung des Skalarprodukt im Komponenten bzgl. ONB</u>

$B = (b_1, \ldots, b_n)$ sei ONB eines eukl. bzw. unit. Raums V, für $u, v \in V$ seien (wie immer) ${}_B u, {}_B v \in \mathbb{C}^n$ die Komponenten, d.h.

$$V \ni u = \sum_i u_i b_i \qquad {}_B u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V \ni v = \sum_j v_j b_j \qquad {}_B v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

dann $\quad \langle u, v\rangle = \sum_{ij} \langle u_i b_i, v_j b_j\rangle = \sum_{ij} u_i^* v_j \overbrace{\langle b_i, b_j\rangle}^{=\,\delta_{ij}}$

$$= \sum_i u_i^* v_i = \langle {}_B u, {}_B v\rangle_{\mathbb{C}^n} \equiv ({}_B u^T)^* \, {}_B v \quad .$$

d.h. $\boxed{\langle u, v \rangle = \langle {}_B u, {}_B v \rangle_{\mathbb{C}^n} = ({}_B u^T)^* \, {}_B v}$

Orthogonale und unitäre Endomorphismen

V sei $\left\{ \begin{matrix} \text{euklidischer} \\ \text{unitärer} \end{matrix} \right\}$ Raum, $A \in \mathcal{L}(V)$

$$\boxed{A \left\{ \begin{matrix} \underline{\text{orthogonal}} \\ \underline{\text{unitär}} \end{matrix} \right\} \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle u, v \rangle \overset{!}{=} \langle Au, Av \rangle \text{ für alle } u, v \in V}$$

<u>Bemerkungen</u>: falls $A \in \mathcal{L}(V)$ orthogonal bzw unitär, dann gilt:

1) $|Av| = |v|$ (d.h. A <u>normerhaltend</u>)

2) $v \perp u \iff Av \perp Au$

3) ist λ EW von A, dann $|\lambda| = 1$

4) A invertierbar

$\ulcorner$ 1) und 2) folgen direkt aus Def.;

zu 3) u sei normierter EV zu EW λ von A; d.h.

$\langle u, u \rangle = 1$ und $Au = \lambda u$; dann

$$1 = \langle u, u \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ unitär bzw. eukl.}}}{=} \langle Au, Au \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \lambda^* \lambda \langle u, u \rangle = |\lambda|^2$$

zu 4)

$Av = 0_V \iff \langle Av, Av \rangle = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0_V$

d.h. $\operatorname{Ker} A = \{ 0_V \}$ und damit A bijektiv $\lrcorner$