Satz

Ist $|Av| = |v|$ für alle $v \in V$ so ist

A orthogonal bzw. unitär.

(d.h. die orthogonalen / unitären Endomorphismen sind genau

die normerhaltenden " " .)

Beweis: für bel. $u, v \in V$ ist z.z. das $\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle$

betrachte dazu $\underline{u+v}$ und $\underline{u+iv}$:

(i) $$\langle u+v, u+v \rangle \overset{!}{=} \langle A(u+v), A(u+v) \rangle$$

$$|u|^2 + |v|^2 + \langle u, v \rangle + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{= \langle u,v \rangle^*} \overset{!}{=} \underbrace{|Au|^2}_{=|u|^2} + \underbrace{|Av|^2}_{=|v|^2} + \langle Au, Av \rangle + \underbrace{\langle Av, Au \rangle}_{= \langle Au, Av \rangle^*}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Re}\, \langle u, v \rangle \overset{!}{=} \mathrm{Re}\, \langle Au, Av \rangle$$

(ii) $$\langle u+iv, u+iv \rangle \overset{!}{=} \langle A(u+iv), A(u+iv) \rangle$$

$$|u|^2 + |v|^2 + i\langle u, v \rangle - i\underbrace{\langle v, u \rangle}_{= \langle u,v \rangle^*} \overset{!}{=} \underbrace{|Au|^2}_{=|u|^2} + \underbrace{|Av|^2}_{=|v|^2} + i\langle Au, Av \rangle - i\underbrace{\langle Av, Au \rangle}_{= \langle Au, Av \rangle^*}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Im}\, \langle u, v \rangle \overset{!}{=} \mathrm{Im}\, \langle Au, Av \rangle$$

Satz

V sei eukl. / unitärer Raum mit ONB B, $A \in \mathcal{L}(V)$
("$\mathbb{R}$" über eukl., "$\mathbb{C}$" über unitärer)

"$\mathbb{R}$": $\quad A$ orthogonal $\iff$ ${}_B A_B^T \, {}_B A_B = \mathbb{1}$

"$\mathbb{C}$": $\quad A$ unitär $\iff$ $({}_B A_B^T)^* \, {}_B A_B = \mathbb{1}$

<u>Beweis</u>: $u, v \in V$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ ONB;

ist A orthogonal, dann $\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle = {}_B(Au)^T {}_B(Av)$

$= ({}_BA_B\,{}_Bu)^T ({}_BA_B\,{}_Bv) = {}_Bu^T \left({}_BA_B{}^T\,{}_BA_B\right) {}_Bv = \langle {}_Bu, {}_BA_B{}^T\,{}_BA_B\,{}_Bv \rangle$

insbes für $u = b_i$, $v = b_j$ $\longrightarrow$ $\delta_{ij} = \left({}_BA_B{}^T\,{}_BA_B\right)_{ij}$

d.h. ${}_BA_B{}^T\,{}_BA_B = \mathbb{1}_n$.

Sei nun ${}_BA_B^T\,{}_BA_B = \mathbb{1}$, dann $\langle u, v \rangle = {}_Bu^T\,{}_Bv = {}_Bu^T\,\mathbb{1}_n\,{}_Bv$

$= {}_Bu^T\,{}_BA_B^T\,{}_BA_B\,{}_Bv \overset{\text{s.o.}}{=} \dots = \langle Au, Av \rangle$.

unitären Fall analog.

<u>Def</u>: <u>Adjunktion einer Matrix</u>

Die zu $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ <u>adjungierte</u> Matrix ist

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A^+ := A^T \in M(n \times m, \mathbb{R})$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $A^+ := (A^T)^* \in M(n \times m, \mathbb{C})$

$\rightarrow$ <u>Rechenregeln</u>: $(A + B)^+ = A^+ + B^+$, $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$,

$(AB)^+ = B^+ A^+$, $(A^+)^+ = A$

<u>Beispiele</u>:

- $\langle a, b \rangle_{\mathbb{C}^n} = (a^T)^* b = a^+ b$

- $A \begin{Bmatrix} \text{orthogonal} \\ \text{unitär} \end{Bmatrix} \iff {}_BA_B^+\,{}_BA_B = \mathbb{1}_n$

Def.: Orthogonale und unitäre Matrizen

Matrix $A \in M(n \times n, \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{Bmatrix})$ $\begin{Bmatrix} \text{orthogonal} \\ \text{unitär} \end{Bmatrix}$

$$:\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} A^T A = \mathbb{1}_n \\ A^+ A = \mathbb{1}_n \end{Bmatrix}$$

Bemerkung: Eine Matrix A mit Spaltenvektoren $(a_1, \dots, a_n)$ ist offenbar g.d. orthogonal / unitär wenn die Spaltenvektoren eine ONB bilden.

Matrix-Gruppen

- $GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) \mid A \text{ invertierbar} \}$

  $\overset{!}{=} \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) \mid \det A \neq 0 \}$

  allgemeine lineare Gruppe

- $U(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^+ A = \mathbb{1}_n \}$

  unitäre Gruppe

- $O(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}_n \}$

  orthogonale Gruppe

- $SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$

  spezielle unitäre Gruppe

• $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = +1 \}$

<u>Spezielle orthogonale Gruppe</u>

(Gruppeneigenschaften : vgl Übung.)

Def.: <u>Adjunktion eines Endomorphismus</u>

V eukl./unitär, $A \in \mathcal{L}(V)$;

der zu A <u>adjungierte Endomorphismus</u> $A^+ \in \mathcal{L}(V)$ ist definiert durch

$$\boxed{\langle u, Av \rangle \overset{!}{=} \langle A^+ u, v \rangle}$$

für alle $u, v \in V$

<u>Bemerkung</u>:

Die Darstellungsmatrix von A^+ ist die (Matrix-)adjungierte Darstellungsmatrix von A:

$$_B(A^+)_B \overset{!}{=} \left({}_BA_B \right)^+$$

(Beweis durch hinschreiben ....)

<u>Rechenregeln</u> genau wie bei Matrixadjunktion:

$$(A+B)^+ = A^+ + B^+, \quad (\lambda A)^+ = \lambda^* A, \quad (AB)^+ = B^+ A^+, \quad (A^+)^+ = A$$

Def: $A \in \mathcal{L}(V)$ <u>selbstadjungiert</u> $:\Longleftrightarrow$ <u>$A^+ = A$</u>

(auch: $\mathbb{R}$: <u>symmetrisch</u>, $\mathbb{C}$: <u>hermitesch</u>)