Partielle Differenzialgleichungen

Erinnerung: "gewöhnliche" DGL $\overline{\text{k-ter Ordnung}}$ bestimmt Funktion $y(x)$ in einer Variablen x durch Relation von x, $y(x)$ und Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial x}(x)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x)$, ..., $\frac{\partial^k y}{\partial x^k}(x)$

z. B DGL 1. Ordnung: $$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = f(y(x), x)$$

2. Ordnung: $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x) = f\left(y(x), \frac{\partial y}{\partial x}(x), x\right)$$

k-ter Ordnung: $$\frac{\partial^k y(x)}{\partial x^k} = f\left(y(x), \frac{\partial y}{\partial x}(x), \dots, \frac{\partial^{k-1} y(x)}{\partial x}, x\right)$$

alternative Formulierung:

DGL 1. Ordnung: $$F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, x\right) = 0$$

2. Ordnung: $$F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, x\right) = 0 \qquad \text{etc.}$$

Verallgemeinerung: partielle DGL k-ter Ordnung bestimmt Funktion $y(\vec{x})$ in n Variablen $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ durch Relation von $\vec{x}$, $y(\vec{x})$ und partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 y(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^k y(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} .$$

wir schreiben allgemein:

partielle DGL 1. Ord.:

$$F\left(y(\vec{x}), \left\{\frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i}\right\}_{i=1,\dots,n}, \vec{x}\right) = g(\vec{x})$$

partielle DGL 2. Ord.:

$$\mathcal{F}\left(y(\vec{x}), \left\{ \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \right\}_{i=1,\dots,n}, \left\{ \frac{\partial^2 y(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1,\dots,n}, \vec{x} \right) = g(\vec{x})$$

etc.

eine partielle DGL heißt <u>linear</u> g.d.w. $\mathcal{F}$ linear in y ist; d.h.

1) $$\mathcal{F}\left(y+\tilde{y}, \left\{ \frac{\partial (y+\tilde{y})}{\partial x_i} \right\}_i, \dots, \vec{x} \right)$$
$$\stackrel{!}{=} \mathcal{F}\left(y, \left\{ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right\}_i, \dots, \vec{x} \right) + \mathcal{F}\left(\tilde{y}, \left\{ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i} \right\}_i, \dots, \vec{x} \right)$$

2) $$\mathcal{F}\left(\lambda y, \left\{ \frac{\partial \lambda y}{\partial x_i} \right\}_i, \dots, \vec{x} \right) \stackrel{!}{=}$$
$$\lambda \mathcal{F}\left(y, \left\{ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right\}, \dots, \vec{x} \right)$$

eine lineare partielle DGL heiß <u>homogen</u> g.d.w. $g(\vec{x}) = 0$.

<u>Offenbar gilt:</u>

Sind $y(\vec{x})$ und $\tilde{y}(\vec{x})$ Lösungen einer <u>homogenen</u>, <u>linearen</u> partiellen DGL, so auch

$$y(\vec{x}) + \tilde{y}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \lambda y(\vec{x}) \quad ;$$

d.h. die Lösungen einer <u>homog.</u>, <u>linearen</u> partiellen DGL bilden einen Vektorraum. (Physik: "Superpositionsprinzip")

Beispiel: 1D-Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ ist linear und homogen (vgl. Übungsaufgabe 3)

$\rightarrow$ mit $f_+(x,t) = u_+(x - ct)$ und

$f_-(x,t) = u_-(x+ct)$

auch $h(x,t) := u_+(x-ct) + u_-(x+ct)$

Lösung der Wellengleichung.

Separationsansatz

Für lineare part. DGLen. am Beispiel der PDGL

$$y + a\frac{\partial y}{\partial x_1} + b\frac{\partial y}{\partial x_2} \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

Ansatz für Lsg: $y(x_1, x_2) = u(x_1)\, v(x_2)$

in (1) eingesetzt ergibt

$$uv + a u'v + b u v' = 0$$

nach Division durch uv erhalten wir

$$1 + a\frac{u'(x_1)}{u(x_1)} \overset{!}{=} -b\frac{v'(x_2)}{v(x_2)} \qquad (2)$$

Gleichung gilt für alle $(x_1, x_2) \in D$ (Definitionsbereich der Lösung); da linke Seite von (2) nur von x_1 und rechte Seite nur von x_2 abhängt ("Separation"), folgt, dass

$$1 + a\,\frac{u'(x_1)}{u(x_1)} = C' = -b\,\frac{v'(x_2)}{v(x_2)} \qquad (3)$$

wobei C' konstant!

⌈ etwas formaler: definiere Fkt. $w(x_1, x_2)$ durch

$$w(x_1,x_2) := -b\,\frac{v'(x_2)}{v(x_2)} \quad ;$$

dann offenbar $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0$; nach (2)

gilt aber auch $w(x_1, x_2) = 1 + a\,\frac{u'(x_1)}{u(x_1)}$,

weshalb $\frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(1 + a\,\frac{u'(x_1)}{u(x_1)}\right) = 0$.

Also $\operatorname{grad} w = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \vec{0}$ und somit

w konstant. ⌋

Aus (3) erhalten wir zwei gewöhnliche DGL zur Bestimmung von $u(x_1)$ und $v(x_2)$:

(i) $\quad 1 + a\,\frac{u'(x_1)}{u(x_1)} = C' \quad \Leftrightarrow \quad u'(x_1) = \frac{C'-1}{a}\,u(x_1)$

(ii) $\quad -b\,\frac{v'(x_2)}{v(x_2)} = C' \quad \Leftrightarrow \quad v'(x_2) = -\frac{C'}{b}\,v(x_2)$

mit Lösungen

$$u(x_1) = u_0\, e^{\frac{C'-1}{a} x_1} \quad , \quad v(x_2) = v_0\, e^{-C'/b\; x_2}$$

$$\rightsquigarrow \quad Y(x_1, x_2) = u(x_1)\,u(x_2) = \underbrace{u_0 v_0}_{\equiv\, Y_0}\; e^{\frac{C-1}{a} x_1}\; e^{-C/b\; x_2}$$

ist Lösung der PDGL (1) ✓