Satz

Jeder unitäre Endomorphismus besitzt eine orthonormale Eigenbasis (und ist damit diagonalisierbar).

Folgerung

Ist $A \in \mathcal{U}(n)$ so ex. $S \in \mathcal{U}(n)$ derart, dass

$$S^+ A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \; ; \quad |\lambda_i| = 1$$

zur Folgerung: $A \in \mathcal{U}(n)$ entspricht unit. End. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$;

nach Satz gibt es orthonormale Eigenbasis $(e_1, \ldots, e_n)$

$\rightarrow \quad S := (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathcal{U}(n) \;, \quad A e_i = \lambda_i e_i \;$ mit $|\lambda_i| = 1$

und $\quad (S^+ A S)_{ji} = e_j^+ A e_i = \lambda_i e_j^+ e_i = \lambda_i \delta_{ij} \; .$

zum Satz:

$V$ sei unitärer Raum der Dimension $n$, $A \in \mathcal{L}(V)$ unitär.

Beweis des Satzes per Induktion über $n$:

$n = 1$ : auf 1D-VR $V$ ist jeder Endomorphis diagonal.

$(n-1) \rightarrow n$ : charakt. Polynom $P_A(t)$ faktorisiert nach Fundamentalsatz der Algebra ($\rightarrow$ Analysis, Funktionentheorie oder Algebra) in Linearfaktoren $(\lambda_j - t)$ gemäß

$$P_A(t) = c\,(\lambda_1 - t)^{\mu_1} (\lambda_2 - t)^{\mu_2} \cdots (\lambda_\ell - t)^{\mu_\ell}$$

wobei $\mu_j \in \mathbb{N}_+$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_j| = 1$.

$\quad \hookrightarrow \sum_\ell \mu_\ell = n$

$u_1$ sei normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$ $(\neq 0)$;

$W := \{ w \in V \mid \langle w, u_1 \rangle = 0 \} \equiv u_1^{\perp}$, das orthogonale Komplement zu $u_1$, ist Untervektorraum von $V$ der Dimension $n-1$.

Wir zeigen unten: $\boxed{A(W) \subset W}$ (1)

denn damit $A|W : W \to W$ offenbar unit. Endomorphismus auf $(n-1)$-dim. VR $W$; nach I.V. besitzt $W$ orthonormale Eigenbasis $(b_1, \dots, b_{n-1})$ die sich mit $u_1$ zu orth. Eigenbasis $(u_1, b_1, \dots, b_{n-1})$ von $V$ bzgl. $A$ ergänzt.

Zu (1): sei $w \in W$, also $\langle w, u_1 \rangle = 0$;

dann $\langle Aw, u_1 \rangle \underset{\lambda_1 \neq 0}{=} \frac{1}{\lambda_1} \langle Aw, \lambda_1 u_1 \rangle \underset{Au_1 = \lambda_1 u_1}{=} \frac{1}{\lambda_1} \langle Aw, Au_1 \rangle \underset{A \text{ unitär}}{=} \frac{1}{\lambda_1} \langle w, u_1 \rangle \underset{w \in W}{=} 0$

also auch $Aw \in W$; d.h. $A(W) \subset W$. $\square$

**Beachte:**

Orthogonale Endomorphismen können im Unterschied zu unitären End.-en nicht immer diagonalisiert werden!

Grund: $P_A(t)$ faktorisiert nicht zwangsläufig in reelle Linearfaktoren!

Beispiel: $R_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (Drehung im $\mathbb{R}^2$)

ist orthogonal, besitzt aber keinen Eigenvektor!

Für orthogonale Abbildungen gilt aber folgendes

**Satz**

Ein orthogonaler Endomorphismus $A \in \mathcal{L}(V)$ besitzt bzgl. einer geeigneten ONB $\mathcal{B}$ von $V$ eine Darstellungsmatrix der Gestalt

$$ {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & -1 & & \\ & & 0 & & & & & & \boxed{R_{\alpha_1}} & \\ & & & & & & & & & \boxed{R_{\alpha_2}} \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & \boxed{R_{\alpha_k}} \end{pmatrix} $$

wobei $\quad R_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_i \in \left]0, \pi\right[$ .

⌈ für Beweis siehe z.B. G. Fischer, Lineare Algebra. ⌋

__Selbstadjungierte__ Endomorphismen sind erfreulicherweise im __komplexen__ wie auch im __reellen__ diagonalisierbar:

**Satz**

(i) Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Endomorphismus' sind __reell__.

(ii) Jeder selbstadjungierte Endomorph. ist diagonalisierbar.

⌈ zu (i): sei $A$ selbstadjungiert mit EW $\lambda$ zu norm. EW $u$;

dann $\lambda = \lambda\langle u,u\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \langle u, Au\rangle = \underbrace{\langle A^+u, u\rangle}_{A^+ = A} = \langle Au,u\rangle = \langle \lambda u,u\rangle = \lambda^*\langle u,u\rangle$

also $\lambda = \lambda^*$ und damit $\lambda$ reell.

zu (ii): wieder per Induktion über $n = \dim V$

$n=1$: ✓

$(n-1) \to n$: $P_A(t)$ faktorisiert über $\mathbb{C}$, d.h.

$$P_A(t) = \alpha(\lambda_1 - t)^{\mu_1}(\lambda_2 - t)^{\mu_2} \cdots (\lambda_\ell - t)^{\mu_\ell} \;;$$

da Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ zugleich EWe von $A$ und diese nach (i) reell, faktorisiert $P_A(t)$ auch über $\mathbb{R}$; d.h. $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$.

$u_1$ sei norm. EV zu $\lambda_1$; $W \equiv u_1^\perp = \{ w \in V \mid \langle w, u_1 \rangle = 0 \}$;

wiederum genügt es z.z., dass $\boxed{A(W) \subset W}$ (1), da hieraus genau wie oben der Induktionsschritt folgt.

zu (1): sei $w \in W$, d.h. $\langle w, u_1 \rangle = 0$; dann

$$\langle Aw, u_1 \rangle \underset{A = A^+}{=} \langle A^+ w, u_1 \rangle = \langle w, Au_1 \rangle = \langle w, \lambda u_1 \rangle = \lambda_1 \langle w, u_1 \rangle = 0$$

d.h. mit $w$ auch $Aw \in W$ und damit $A(W) \subset W$. ┘

im unitären Fall gibt es noch eine allgemeinere Aussage:

<u>Satz</u>

$V$ sei ein unitärer VR.

$$A \in \mathcal{L}(V) \text{ diagonalisierbar} \iff AA^+ \overset{!}{=} A^+A$$

(d.h. genau "<u>A ist normal</u>")

┌ Beweis ähnlich der vorherigen Beweise, siehe z.B. G. Fischer, Lin. Algebra ┘