Linearform, Dualraum, duale Basis, duale Abbildung

V sei Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Linearform α auf V $\equiv$ lin. Abb. $\alpha : V \to \mathbb{K}$, $v \mapsto \alpha v$

Dualraum V^* zu V $\equiv$ $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$: VR der Linearformen auf V

Satz / Def.

Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von V, so gibt es eindeutig bestimmte duale Basis $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ von V^* derart, dass

$$\boxed{b_i^* b_j = \delta_{ij}} \qquad (1)$$

- durch (1) lin. Abb. $b_i^* : V \to \mathbb{K}$ auf Basis B bestimmt und damit eindeutig festgelegt.

- B^* vollständig: Für $\alpha \in V^*$ setze $\alpha_i := \alpha b_i$; dann

$$\alpha \overset{!}{=} \alpha_1 b_1^* + \cdots + \alpha_n b_n^* ,$$

denn $(\alpha_1 b_1^* + \cdots + \alpha_n b_n^*) b_i \overset{(1)}{=} \alpha_i = \alpha b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

- B^* linear unabhängig:

gelte $\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^* = 0_{V^*}$ $\quad (\; : V \to \mathbb{K}, v \mapsto 0)$

dann $0 = 0_{V^*} b_i = (\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^*) b_i \overset{(1)}{=} \lambda_i$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

insbesondere: $\boxed{\dim V = \dim V^*}$

$\rightarrow$ Isomorphismus ($\equiv$ bijekt., lin. Abb.) $\Psi_{\mathcal{B}}: V \to V^*$

gegeben durch $\quad b_i \xmapsto{\Psi_{\mathcal{B}}} b_i^*$.

<u>Beispiel</u>

$V = \mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$; $\quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i. Zeile

$\hookrightarrow$ Dualraum $V^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv \mathcal{M}(1 \times n, \mathbb{R})$

duale Basis $\mathcal{B}^*$ zu $\mathcal{B}$: $\quad \mathcal{B} = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_n^T)$

(denn $\quad e_i^T e_j \equiv \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}$

Isomorphismus: $\quad \Psi_{\mathcal{B}}: e_i \longmapsto e_i^T$

<u>Duale Abbildung</u>

V, W VRe über $\mathbb{K}$; $\quad A: V \to W$ linear;

die zu A <u>duale Abbildung</u> $A^*: W^* \to V^*$ ist definiert
$\beta \longmapsto A^*\beta$

durch $\quad A^*\beta := \beta \circ A \quad (\in \mathcal{L}(V, \mathbb{K}))$

<u>Schematisch</u>:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "A^*\beta = \beta \circ A"'] & W \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Satz

B und B^* seien Basis von V und die dazuale Basis von V^*, entsprechend C und C^* Basis/ duale Basis von W bzw. W^*.

Dann gilt:

$$\boxed{{}_{B^*}(A^*)_{C^*} \overset{!}{=} \left({}_C A_B\right)^T}$$

$\ulcorner$ Beweis durch hinschreiben ... $\lrcorner$

Notation in der Physik

1) dualer Basisvektor wird durch hochgestellten Index gekennzeichnet,

$$\text{statt } b_i^* \text{ also } b^i$$

$\rightarrow$ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ Basis von V

$(b^1, b^2, \ldots, b^n)$ duale Basis von V^*

2) Komponenten eines Vektors $v \in V$ bzgl. $(b_1, \ldots, b_n)$ bekommen obere Indices:

$$V \ni v = v^1 b_1 + v^2 b_2 + \cdots + v^n b_n = \sum_{i=1}^n v^i b_i$$

mit Einsteinscher Summenkonvention $\boxed{v = v^i b_i}$

3) Komponenten einer Linearform $\alpha \in V^*$ bzgl. $b^1, \ldots, b^n$ bekommen untere Indices

$$V^* \ni \alpha = \alpha_1 b^1 + \alpha_2 b^2 + \cdots + \alpha_n b^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i b^i \underset{\text{E.S.K.}}{=} \alpha_i b^i$$

Beispiel: • $b^i b_j = \delta^i_j = \begin{cases} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{cases}$

• $v = v^i b_i \,, \quad \alpha = \alpha_j b^j$

$$\rightarrow \quad \alpha v = (\alpha_j b^j)(v^i b_i) = \alpha_j v^i \underbrace{b^j b_i}_{= \delta^j_i} = \alpha_i v^i$$

für eine weitergehende Einführung in diese sog. "Tensorrechnung" siehe z.B. Arens et al., Mathematik

Verknüpfungen von Vektorräumen: Direkte Summe und Tensorprodukt

Direkte Summe zweier K-VRe V und W

$\equiv$ K-VR mit

• **Menge** $V \oplus W := \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$

$(= V \times W$ · kartesisches Produkt$)$

• **Addition**

$$(v_1, w_1) \underset{V \oplus W}{+} (v_2, w_2) := (v_1 \underset{V}{+} v_2 \,, w_1 \underset{W}{+} w_2)$$

• **Skalarmultiplikation**

$$\lambda (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

allgemeiner: <u>direkte Summe</u> von <u>N</u>-$\mathbb{K}$-VRen $V_1, V_2, \dots, V_N$

$\equiv$ $\mathbb{K}$-VR mit

- <u>Menge</u> $\bigoplus_{i=1}^{N} V_i \equiv V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_N$

$$=: \{ (v_1, v_2, \dots, v_N) \mid v_i \in V_i \}$$

- <u>Addition</u>

$$(v_1, v_2, \dots) + (u_1, u_2, \dots) := (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots)$$

- <u>Skalarmultiplikation</u>

$$\lambda (v_1, v_2, \dots) := (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots)$$

<u>Konvention</u>:

$$V \ni v \equiv (v, o_W) \in V \oplus W$$
$$W \ni w \equiv (o_V, w) \in V \oplus W$$

$\rightarrow$

- $v + w \equiv (v, o_W) + (o_V, w) = (v, w)$
- V UVR von $V \oplus W$
- W UVR von $V \oplus W$
- $V \cap W = \{ (o_V, o_W) \} = \{ o_{V \oplus W} \}$

$\rightarrow$ <u>(innere) direkte Summe</u> zweier <u>Untervektorräume</u> V, W des VRs U wobei $V \cap W \overset{!}{=} \{ o_U \}$ (sonst <u>nicht</u> definiert)

$$V \oplus W := V + W \equiv \{ v + w \mid v \in V, w \in W \}$$

Beispiele

- $$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \} \equiv \mathbb{R}^2$$

  $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

  $$\lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

- $$\underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{N \text{ mal}} \equiv \mathbb{R}^N$$

- V eukl./unitärer Raum, $U \subset V$ UVR

  Orthogonales Komplement von U in V:

  $$U^\perp := \{ w \in V \mid \langle w, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U \}$$

  offenbar $U \cap U^\perp = \{ 0_V \}$ und $U \oplus U^\perp = V$

Dimensionen

- $$\dim (V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

- $$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{N} V_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \dim V_i$$

$\ulcorner$ denn mit $a_1, \dots, a_n$ Basis von V und $b_1, \dots, b_m$ Basis von W ist offenbar

$$(a_1, 0_W), (a_2, 0_W), \dots, (a_n, 0_W), (0_V, b_1), (0_V, b_2), \dots, (0_V, b_m)$$

Basis von $V \oplus W$ $\lrcorner$