Elemente der Funktionentheorie

komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktion

Erinnerung: $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ <u>differenzierbar</u> in x_0

$$:\Leftrightarrow \quad \exists! \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) =: f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0)$$

d.h. $\quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h^2)$

Def.: $\quad f: \begin{array}{l} U \to \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) \end{array}$ <u>komplex differenzierbar</u> in $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$

$$:\Leftrightarrow \quad \exists! \quad \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(z_0+h) - f(z_0)\right) =: f'(z_0) \equiv \frac{df}{dz}(z_0)$$

d.h. $\quad f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)\, h + o(h^2)$

- $f: U \to \mathbb{C}$ ist <u>holomorph</u> wenn f in jedem $z_0 \in U$ komplex diffbar ist.

- f' ist <u>Ableitung</u> von f
- f ist <u>Stammfunktion</u> zu f'

aufgrund analoger Def.en von reeller und komplexer Diff.barkeit gelten gleiche <u>Ableitungsregeln</u>:

- $(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\lambda f)' = \lambda f'$

- $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
- $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z)$

Beispiele:

- $n \in \mathbb{N}_+$: $(z^n)' = n z^{n-1}$, $z^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph
- $n \in \mathbb{N}_+$: $(z^{-n})' = -n z^{-n-1}$, $z^{-n} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph
- Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph
- $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$

  Q: Polynom mit Nullstellen $z_1, \dots, z_k$
- Potenzreihen für $f(z) := \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$ holomorph auf Konvergenzbereich

  $\rightarrow$ etwa:

$$e^z \equiv \exp(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l , \quad (e^z)' = e^z$$

$$\sin z := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!} , \quad (\sin z)' = \cos z$$

$$\cos z := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!} , \quad (\cos z)' = -\sin z$$

Komplexe vs. reelle Differenzierbarkeit: Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen

$$f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) \qquad \xleftrightarrow[f = u + iv \equiv \binom{u}{v}]{z = x+iy \equiv \binom{x}{y}} \qquad \tilde{f}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2, \quad \binom{x}{y} \mapsto \binom{u}{v}$$

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$$

Erinnerung:

$\tilde{f}$ reell diffbar in $p = \binom{x_0}{y_0}$

:<=> es gibt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ so, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \left(\tilde{f}(p+h) - \tilde{f}(p) - Ah \right) \stackrel{!}{=} 0$$

dann $A =: d\tilde{f}_p$: Differenzial von $\tilde{f}$ in p.

Lemma

f komplex diffbar in $z_0 = x_0 + iy_0$

$\iff$ $\tilde{f}$ reell diffbar in $p = \binom{x_0}{y_0}$ und

$$d\tilde{f}_p \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{für geig. } a, b \in \mathbb{R}$$

„$\Rightarrow$" $\quad f(z_0 + (h_1 + ih_2)) = f(z_0) + f'(z_0)(h_1 + ih_2) + o(h^2)$

$$= f(z_0) + \underbrace{(a+ib)(h_1+ih_2)}_{=} + o(h^2)$$

sei $f'(z_0) = a + ib$

$$(ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1) \equiv \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ ah_2 + bh_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

d.h. $\tilde f$ reell diffbar und $d\tilde f_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ✓

„<=“: $d\tilde f_p \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \underset{\text{s.o.}}{=} (a+ib)(h_1+ih_2)$ (*)

dann $f(z_0 + \underbrace{(h_1+ih_2)}_{= h}) = f(z_0) + d\tilde f_p \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h^2)$

$$\overset{(*)}{=} f(z_0) + (a+ib)(h_1+ih_2) + o(h^2)$$

$\rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\underbrace{f(z_0+h) - f(z)}_{= (a+ib)h + o(h^2)} \Big) = a + ib \equiv f'(z_0)$ ✓

✓.

mit $\tilde f \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist $d\tilde f_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\rightarrow d\tilde f_p \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \iff \boxed{\begin{array}{c} \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \\ \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \end{array}}$

Cauchy-Riemannschen-DGLen
für $\mathrm{Re} f \equiv u$ und $\mathrm{Im} f \equiv v$

→ **Satz**

$f \equiv u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

$\iff$ $\tilde f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ reell diffbar und u, v genügen den Cauchy-Riemanschen DGLen.

Folgerungen

1) Real- und Imaginärteil u bzw. v einer <u>holomorphen</u> Funkt. $f = u + iv$ sind <u>harmonisch</u>

d.h. genau $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$

$$\Gamma \text{ denn } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{= \frac{\partial v}{\partial y}}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{= -\frac{\partial v}{\partial x}}\Big) \quad \leftarrow \text{C.R.!}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x y} v - \frac{\partial^2}{\partial y x} v = 0.$$

$\Delta v = 0$ analog. $\lrcorner$

Anwendung in Elektrostatik in (quasi-) 2D

2)

$$d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a/\lambda & -b/\lambda \\ b/\lambda & a/\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

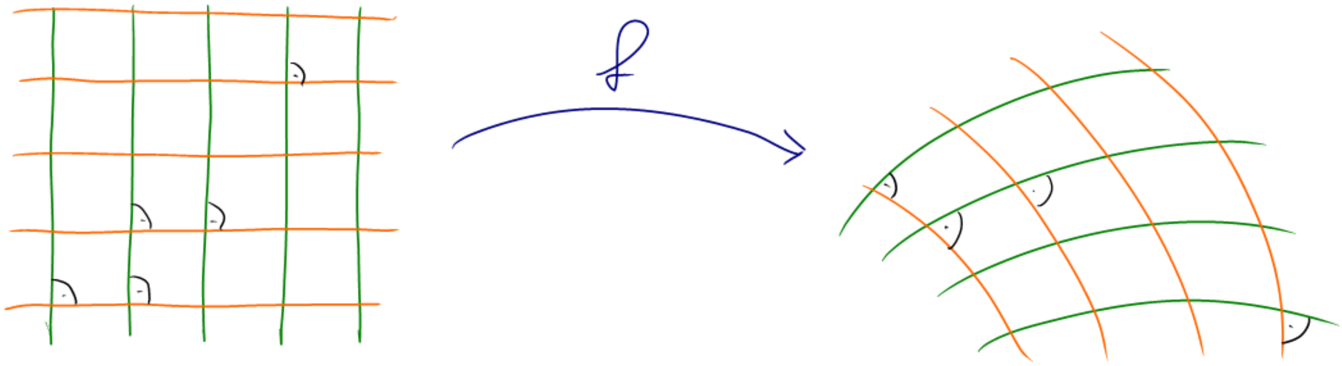
$\lambda = \sqrt{a^2+b^2}$ orthonormal $\cot\alpha \overset{!}{=} a/b$

d.h. $d\tilde{f}_p = \lambda \cdot R_\alpha$ ist <u>winkeltreu</u>:

isotrope Dehnung / Stauchung (λ), <u>Drehung</u> (R_α)

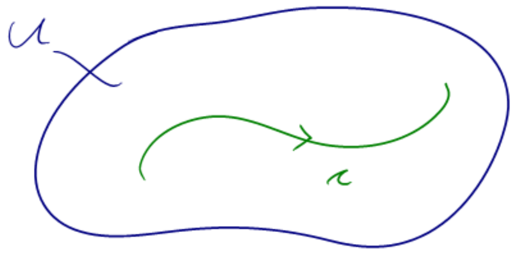
$$\sphericalangle(\vec{r}, \vec{s}) \overset{!}{=} \sphericalangle(d\tilde{f}_p(\vec{r}), d\tilde{f}_p(\vec{s}))$$

Eine holomorphe Fkt f ist damit <u>lokal winkeltreu</u> und somit per def. eine <u>konforme</u> Abb.



Komplexes Kurvenintegral

über Fkt $f: U \to \mathbb{C}$ längs Kurve $c: [t_0, t_1] \to U$

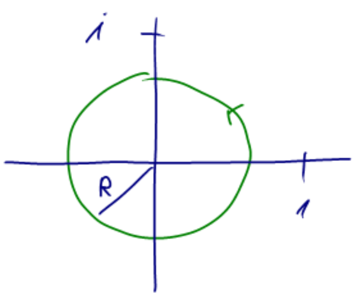


$$\boxed{\int_c f(z)\,dz := \int_{t_0}^{t_1} f(c(t))\, c'(t)\,dt}$$

$$\left(= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{Re}\big(f(c(t))c'(t)\big)dt + i \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{Im}\big(f(c(t))c'(t)\big)dt \right)$$

Beispiel: c = Kreisweg, Radius R, Mittelpkt 0, $\circlearrowleft$

$: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto Re^{it}$



$\to \quad c'(t) = iRe^{it} = ic(t)$

$$\longrightarrow \bullet \quad \int_c z \, dz = i \int_0^{2\pi} c(t)^2 \, dt = i \int_0^{2\pi} R e^{2it} \, dt = 0$$

$$\bullet \quad \int_c \frac{1}{z} \, dz = i \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{c(t)}}{\cancel{c(t)}} \, dt = 2\pi i$$