Singularitäten

isolierte Singularität z_0 der holomorphen Fkt

$f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ist

1) hebbar $:\Longleftrightarrow$ $\exists !\ a \in \mathbb{C} :$ $\tilde{f}(z) := \begin{cases} a : & z = z_0 \\ f(z) : & z \in U \setminus \{z_0\} \end{cases}$

holomorph

2) Pol von Ordnung k $:\Longleftrightarrow$ z_0 ist hebbare Singularität von $(z-z_0)^k f(z)$ und nicht-hebbare Singularität von $(z-z_0)^{k-1} f(z)$

3) wesentlich $:\Longleftrightarrow$ z_0 weder hebbare Sing. noch Pol von f.

Meromorphe Funktion

$f : U \to \mathbb{C}$ meromorph $:\Longleftrightarrow$ $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf Polstellen $z_1, z_2, z_3 \dots \in U$

Laurent-Reihe

meromorphe Fkt. f kann um eine Polstelle z_0 durch Laurent-Reihe entwickelt werden:

z_0 sei Pol k-ter Ordnung von f, d.h. $(z-z_0)^k f(z)$ holomorph und kann durch Potenzreihe entwickelt werden:

$$(z-z_0)^k f(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\hookrightarrow \quad f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^k} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{b_2}{(z-z_0)^{k-2}} \cdots$$

$$\cdots + \frac{b_{k-1}}{z-z_0} + b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \dots$$

d.h.

$$\boxed{\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \\ &= \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \end{aligned}}$$

Laurent-Reihe von f um Pol k-ter Ordnung bei z_0

Residuum

einer meromorphen Fkt. $f : U \to \mathbb{C}$ bei Polstelle z_0:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z)\, dz}$$

(r so, dass $B_r(z_0) \subset U$)

Berechnungsmethoden:

1) anhand Laurent-Reihe: $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$$\to \int_{K_r(z_0)} f(z)\, dz = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{K_r(z_0)} (z-z_0)^n dz}_{= 2\pi i \cdot \delta_{n,-1}} = 2\pi i \, c_{-1}$$

d.h. $\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}}$

2) z_0 sei Pol 1. Ordnung von f:

d.h. $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$

$\rightarrow \quad (z-z_0) f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \cdots$

d.h. $c_{-1} \overset{!}{=} \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

Pol 1. Ordnung

nach 1) also $\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$

3) g und h seien holomorphe Fkten, z_0 sei einfache Nullstelle von h; dann $f = \dfrac{g}{h}$ meromorph mit Pol 1. Ordnung in z_0

nach 2) also $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \left((z-z_0) \dfrac{g(z)}{h(z)} \right)$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(z)}{(h(z)-h(z_0))/(z-z_0)} = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$;

$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) \overset{!}{=} \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$

4) i. A. kann c_{-1} und damit $\operatorname{Res}(f, z_0)$ immer per Differenziation bei z_0 aus $(z-z_0)^k f(z)$

$= \sum\limits_{n=-k}^{\infty} c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + \cdots$

gewonnen werden.

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \left.\frac{d^k}{dz^k}\right|_{z=z_0} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big)}$$

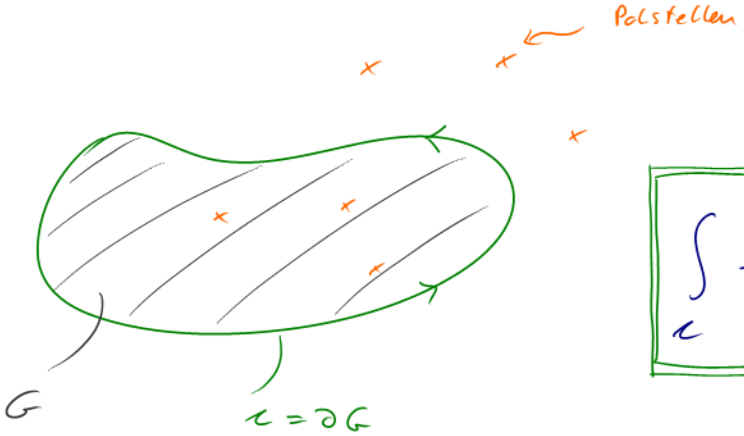
Pol k-ter Ordnung

<u>Beispiele</u>:

- $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{z-z_0}, z_0 \right) \overset{2)}{=} g(z_0)$
- $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{\sin z}, 0 \right) \overset{3)}{=} \frac{g(0)}{\cos 0} = g(0)$
- $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{\sin z}, \pi \right) \overset{3)}{=} \frac{g(\pi)}{\cos \pi} = -g(\pi)$
- $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{z^3}, 0 \right) \overset{4}{=} \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2}{dk^2}\right|_0 \left(\cancel{z^3} \frac{g(z)}{\cancel{z^3}} \right) = \frac{1}{2} g''(0)$

<u>Residuensatz</u> (Für "einfache" Wege)

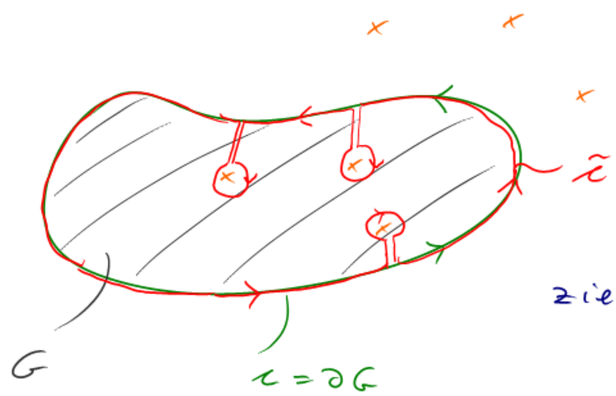
$f : U \to \mathbb{C}$ meromorph mit Polstellenmenge $S = \{z_1, z_2, \dots\} \subset U$; $G \subset U$ <u>einfach</u> zusammenhängendes Gebiet, c sei <u>Rand</u> von G in positiver Orientierung: $c = \partial G$;



dann

$$\boxed{\int_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap G} \mathrm{Res}(f, z_0)}$$

zum Beweis betrachte Weg $\tilde{c}$ wie folgt:



$\tilde{c}$ lässt sich offenbar stetig auf Punkt zusammenziehen ohne Polstellen zu kreuzen;

$\rightarrow$ $\tilde{c}$ verläuft in einem einf. zushgd. Gebiet $\tilde{G}$ auf dem $\tilde{f}$ holomorph; nach Cauchyschem Integralsatz also

$$0 \overset{!}{=} \int_{\tilde{c}} f(z)\, dz = \int_{c} f(z)\, dz - \sum_{z_0 \in S \cap G} \int_{K_r(z_0)} f(z)\, dz$$

d.h.
$$\int_{\tilde{c}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap G} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z)\, dz}_{= \operatorname{Res}(f, z_0)}$$

Anwendungsbeispiele:

1) Berechnung von $I(k,a) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2}\, dx$, $\quad k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$

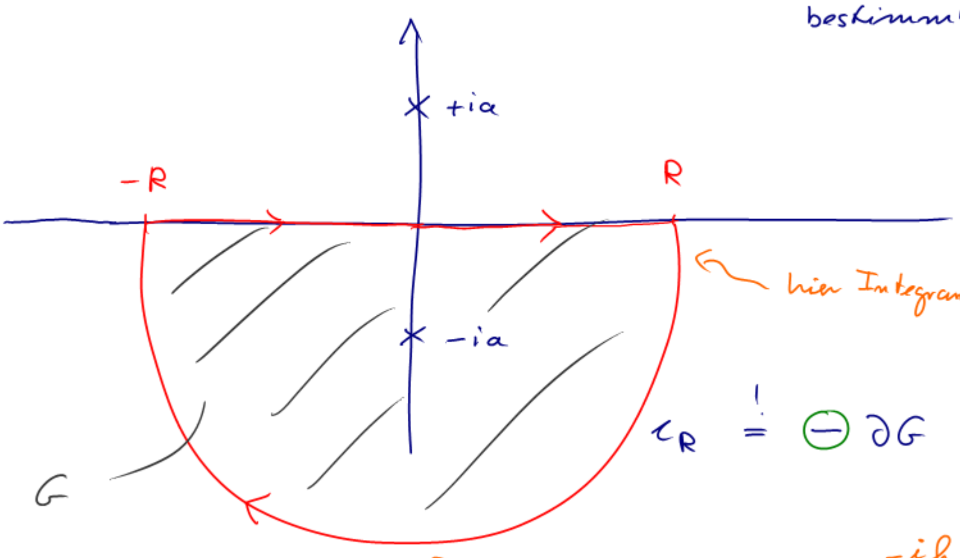
Fasse $I(k,a)$ als kompl. Kurvenintegral über reelle Achse $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auf:

$$I(k,a) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{e^{-ikz}}{(z+ia)(z-ia)}}_{\text{meromorph, Pole 1. Ordnung bei } \mp ia} dz$$

Idee: finde geschlossenen Weg $\mathcal{C}_R \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$I(k,a) \overset{!}{=} \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{-ikz}}{(z+ia)(z-ia)}\,dz}_{\text{mittels Residuensatz bestimmbar!}}$$

sei $k>0$:



hier Integrand $\sim \frac{1}{R^2}$ ✓

$\mathcal{C}_R \overset{!}{=} \ominus\, \partial G$

hier Integrand $\sim e^{-ik(-iR)} = e^{-kR}$

exponentiell klein ✓

$$\rightarrow \quad I(k,a) \overset{!}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{-ikz}}{(z-ia)(z+ia)}\,dz = \ominus\, 2\pi i \operatorname{Res}(\dots, -ia)$$

$$= -2\pi i \, \frac{e^{-ka}}{-2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

Falls $k<0$ schließt man Weg in oberer Halbebene

$$\leadsto \quad I(k,a) = \frac{\pi}{a} e^{+ka};$$

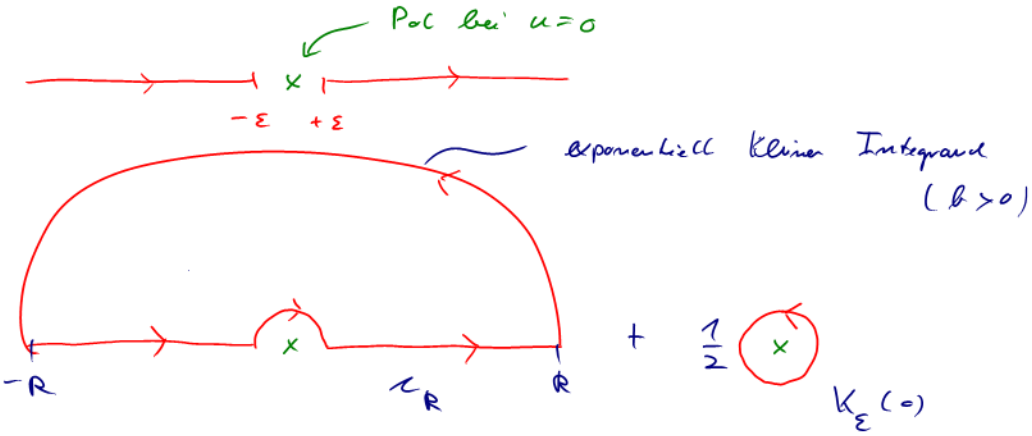
d.h.

$$I(k,a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a}.$$

2) $$J(b) := \int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{e^{ibu}}{u} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} du \, \frac{e^{ibu}}{u} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} du \, \frac{e^{ibu}}{u} \right)$$

"Hauptwert" des Integrals $\qquad (b > 0)$

$\hat{=}$

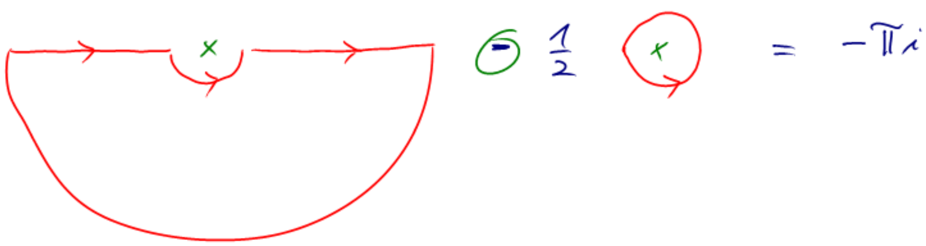


$$= \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{ibz}}{z} dz}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{K_\varepsilon(0)} \frac{e^{ibz}}{z} dz}_{= 2\pi i \, \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{ibz}}{z}, 0\right)}_{=1} = 2\pi i}$$

$$= \pi i$$

Falls $b < 0$ muss in unteren Halbebene geschlossen werden:

$J(b) =$



d.h. $$J(b) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibu}}{u} du = \pi i \, \mathrm{sgn}\, b$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \frac{\sin ka}{ka} \, e^{ikx}} = \frac{1}{4\pi i a} \int_{-\infty}^{+\infty} du \left(\frac{e^{iua}}{u} - \frac{e^{-iua}}{u} \right) e^{iux}$$

$$= \frac{1}{4\cancel{\pi} a \cancel{i}} \left(\underbrace{⨍_{\mathbb{R}} du \, \frac{e^{iu(x+a)}}{u}}_{= \cancel{i\pi} \operatorname{sgn}(x+a)} - \underbrace{⨍_{\mathbb{R}} du \, \frac{e^{iu(x-a)}}{u}}_{= \cancel{i\pi} \operatorname{sgn}(x-a)} \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \, \frac{1}{2} \left(\operatorname{sgn}(x+a) - \operatorname{sgn}(x-a) \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \begin{cases} 0 & : \; x < -a \\ 1 & : \; |x| < a \\ 0 & : \; x > a \end{cases}$$

vgl.: Fouriertrafo der „Kastenfkt." im VL 8.