Lösungen der Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = -\rho/\varepsilon_0$$

zuerst: Kugel- bzw. zylindersymmetrische Lösungen ϕ

für " " " " Ladgsdichte ρ

Verfahren: 1) bestimme $\vec{E}$ entsprechender Symmetrie aus $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ mittels S. v. Gauß

2) bestimme ϕ als Potenzial zu $\vec{E}$ durch Integration

Kugelsymm. Ladungsdichte:

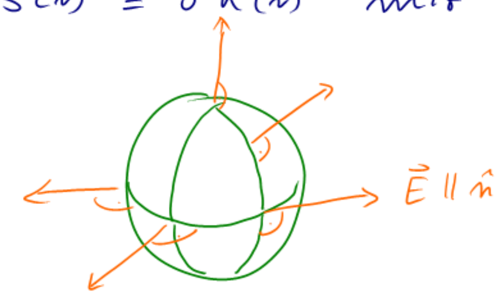
$$\rho(r, \cancel{\vartheta}, \cancel{\varphi})$$

$\rightarrow$ isotropes (kugelsymm.) $\vec{E}$-Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \underline{E(r)}\, \vec{e}_r$$

zur Bestimmung von $E(r)$ betrachte Fluss von $\vec{E}$ durch

Sphäre $S(r) \equiv \partial K(r)$ mit Radius r:



$$4\pi r^2 \underline{E(r)} = \int_{S(r)} \vec{E}\, d\vec{f} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{K(r)} \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K(r)} \rho\, dV$$

($\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$)

$\longrightarrow$

folglich
$$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(r)}{r^2}} \qquad (1)$$

mit $\quad q(r) = \int_{K(r)} \rho \, dV \quad$: elekt. Ldg. in Kugel $K(r)$

$$\overset{!}{=} \int_0^r dr' \, 4\pi r'^2 \cdot \rho(r)$$

"Zwiebelschalenintegration"

Potenzial $\phi(r)$ bestimmt durch $\quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r$

d.h. $\quad \frac{\partial\phi}{\partial r}(r) = -E(r)$

$$\rightarrow \quad \boxed{\phi(r) = \int_r^\infty E(r') \, dr'} \qquad (2)$$

obere Integralgrenze (∞) sichert Einhaltung der

Standardrandbedingung:

$$\phi(\vec{r}) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty$$

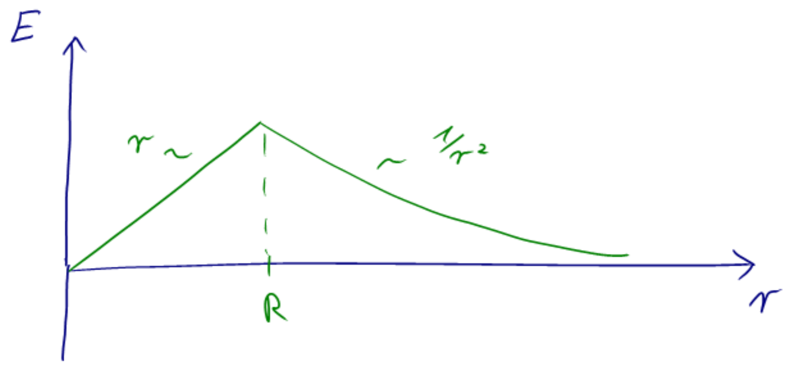
Beispiele:

a) homogen geladene Kugel, Radius R, Ladg. Q :

$$\rightarrow \quad q(r) = \begin{cases} Q \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 & : r \leq R \\ Q & : r > R \end{cases}$$

(1)

$$\rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3} & : \quad r \leq R \\ \frac{1}{r^2} & : \quad r > R \end{cases}$$



$\rightarrow$ <u>Potenzial $\phi(r)$:</u>

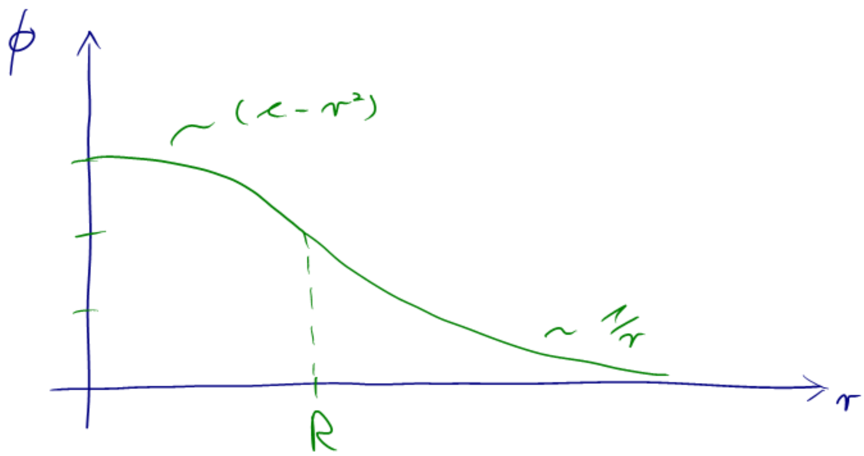
<u>Für $r > R$:</u>

$$\underline{\underline{\phi(r)}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r'^2}\, dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r'} \Big|_r^\infty \right) = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}}}$$

<u>Für $r \leq R$:</u>

$$\underline{\underline{\phi(r)}} = \int_r^R E(r')\, dr' + \int_R^\infty E(r')\, dr'$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R^3} \underbrace{\int_r^R r'\, dr'}_{= \frac{R^2 - r^2}{2}} + \frac{1}{R} \right) = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right)}}$$



b) homogen geladene Sphäre, Radius R, Ladung Q

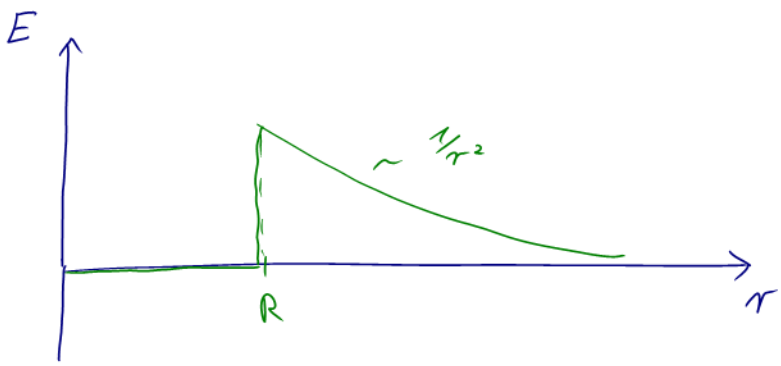
$$\rightarrow \quad q(r) = \begin{cases} 0 & : r \leq R \\ Q & : r > R \end{cases}$$

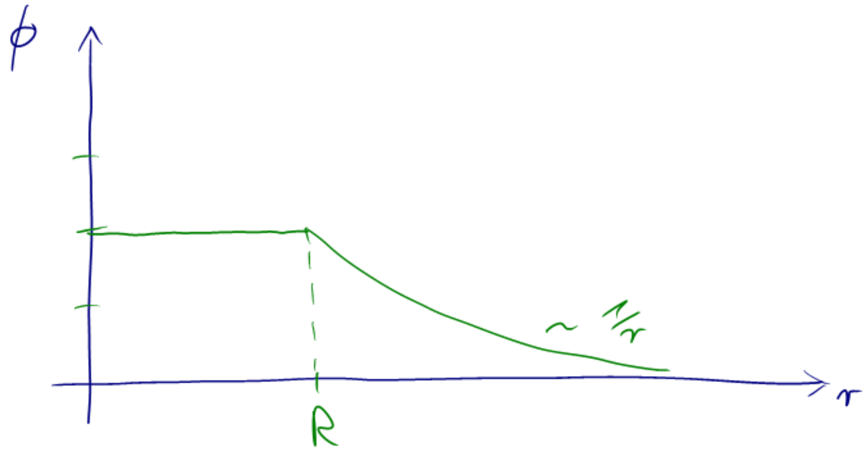
(1)

$$\rightarrow \quad E(r) = \begin{cases} 0 & : r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & : r > R \end{cases}$$

(2)

$$\rightarrow \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{R} & : r \leq R \\ \frac{1}{r} & : r > R \end{cases}$$





1) Punktladung Q in $\vec{0}$:

→ singuläre Ladungsdichte $\rho_Q(\vec{r})$, charakterisiert

durch (i) $\rho_Q(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{0}$

(i) für $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $\vec{0} \in V$

$$\int_V \rho_Q(\vec{r})\, d^3\vec{r} \overset{!}{=} Q$$

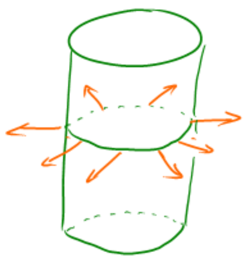
Feld und Potenzial der Punktladung Q in $\vec{0}$ erhalten wir aus Feld und Potenzial einer mit Q (homogen) geladenen Kugel $K(R)$ im Grenzfall $R \to 0+$; d.h.:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2}\,\hat{r} \quad \text{für } \vec{r} \neq 0 \\ \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|} \quad \text{für } \vec{r} \neq 0 \end{aligned}}$$

Zylindersymmetrische Ladungsdichte

in Zylinderkoordinaten r, φ, z (statt wie üblich ρ, φ, z)

$$\rho(r, \cancel{\varphi}, \cancel{z})$$



→ $\vec{E}(r, \varphi) = E(r)\, \vec{e}_r$

betrachte Fluss von $\vec{E}$ durch Rand des Zylinders $Z_\ell(r)$ von Höhe ℓ und Radius r:

$$\underline{\underline{2\pi r \ell E(r)}} = \int_{\partial Z_\ell(r)} \vec{E}\, d\vec{f} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{Z_\ell(r)} \operatorname{div}\vec{E}\, dV \overset{\operatorname{div}\vec{E} = \varrho/\varepsilon_0}{=} \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{Z_\ell(r)} \varrho\, dV}}$$

folglich

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_\ell(r)}{\ell r}}$$

wobei

$$q_\ell(r) = \int_{Z_\ell(r)} \varrho\, dV \quad : \text{elektr. Ldg in } Z_\ell(r)$$

$$\overset{!}{=} \ell \int_0^r dr'\, 2\pi r'\, \varrho(r')$$

"Zwiebelringintegration"

<u>beachte</u>: wegen $q_\ell(r) \sim 1/\ell$ ist für $r \to \infty$ $E(r) \sim \frac{1}{r}$

<u>Potenzial</u> $\phi(r)$ bestimmt durch $E(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}(r)$;

wegen $E(r) \sim 1/r$ ist $\int_r^\infty E(r')\, dr'$ <u>divergent</u>; somit

Standardrandbedingung <u>nicht</u> realisierbar.

alternativ: gelte $\phi(r_0, 0, 0) = 0$ für beliebig aber fest gewähltes $r_0 > 0$.

$$\rightsquigarrow \boxed{\phi(r) = \int_r^{r_0} E(r')\, dr'}$$

Beispiel: vgl. Übung