Greensche Funktion, δ-Distribution

$\hookrightarrow$ ermöglicht Bestimmung des Potenzials ϕ einer allgemeinen Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$; d.h. ϕ Lösung der Poisson-Gl.

$$\Delta \phi = -\rho \qquad (\text{hier: } \varepsilon_0 = 1)$$

unter Standardrandbedingung $\phi(\vec{r}) \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$

Idee: Linearität der Poisson-Gl. ermöglicht Konstruktion von ϕ per Linearkombination ($\equiv$ Superposition) von Einheitspunktladungslösungen

Notation:

1) $\delta(\vec{r}) :=$ Ladungsdichte einer Einheitspunktladung in $\vec{0}$ (vgl. Bsp. c) in Vrlsg. 3; hier: $Q \equiv 1$), d.h.:

(i) $\delta(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{0}$

(ii) für $V \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{0} \in V$:

$$\int_V \delta(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 1$$

2) $G(\vec{r}) :=$ Potenzial der Einheitspunktladung in $\vec{0}$ (mit Standardrandbedingung), d.h. nach Bsp. c) in Vrlsg. 3:

$$\boxed{G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|}}$$

Somit gilt:

- $\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$ $\quad$ ($\hat{=}$ Poisson-Gl. für $\phi(r) \equiv G(\vec{r})$

  mit $\rho(\vec{r}) \equiv \delta(\vec{r})$, Einheitspktldgsdichte)

- $q\,\delta(\vec{r})$ = Ladungsdichte einer Pktldg q in 0

  ⌈ denn (i)' $\quad q\,\delta(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$ nach (i) ✓

  (ii)' für $\vec{0} \in V \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_V q\,\delta(\vec{r})\,d^3\vec{r} = q \underbrace{\int_V \delta(\vec{r})\,d^3\vec{r}}_{=1 \text{ nach (ii)}} = q \quad ✓ ⌋$$

- $q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ = Ladungsdichte einer Pktldg q in $\vec{r}_0$

- $\sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$ = " $\quad$ " von N Pktldgen

  $q_1, q_2, \dots, q_N$ an Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Konstruktion von ϕ (in 5 Schritten):

1) Potenzial $\phi^{(1)}$ einer Einheitspktldg in 0:

$$\phi^{(1)}(\vec{r}) \overset{!}{\equiv} G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \quad ✓$$

2) Potenzial $\phi^{(2)}$ einer Pktldg q in 0:

$$\phi^{(2)}(\vec{r}) \overset{!}{=} q\,G(\vec{r}) \quad \left(= \frac{q}{4\pi|\vec{r}|} \right)$$

⌈ denn $\Delta\phi^{(2)}(\vec{r}) = \Delta(q\,G(\vec{r})) = q\,\Delta G(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r})$ ✓ ⌋

3) Potenzial $\phi^{(3)}$ einer Pktldg. q in $\vec{r}_0$:

$$\phi^{(3)}(\vec{r}) \overset{!}{=} \phi^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}_0) \overset{2)}{=} q\, G(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

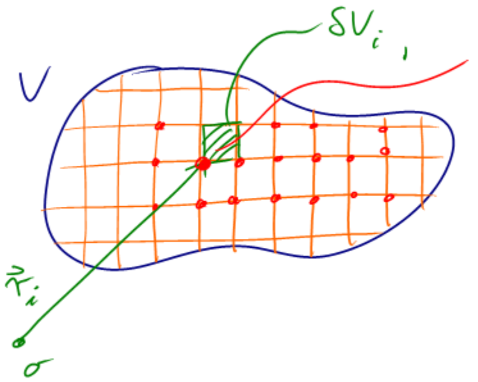
4) Potenzial $\phi^{(4)}$ von N Pktldgen $q_1, \dots, q_n$ an Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$:

$$\phi^{(4)}(\vec{r}) \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{N} q_i\, G(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

⌈ denn wegen Linearität von Δ:

$$\Delta\phi^{(4)}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\Delta G(\vec{r}-\vec{r}_i)}_{= -\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)}_{\text{Dichte der } N \text{ Pktldgen}} \quad \checkmark$$

5) Potenzial ϕ einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$:



$$\delta q_i = \rho(\vec{r}_i)\, \delta V_i$$

d.h.

$$\phi(\vec{r}) \overset{(4)}{=} \sum_i \rho(\vec{r}_i)\, G(\vec{r}-\vec{r}_i)\, \delta V_i$$

$$\underset{\delta V_i \to 0}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}\,')\, G(\vec{r}-\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'$$

(1) $$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}\,')\, \underbrace{G(\vec{r}-\vec{r}\,')}_{= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}\, d^3\vec{r}\,' = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,'}$$

Test:

$$\Delta_{\vec r}\, \phi(\vec r) = \Delta_{\vec r} \int \rho(\vec r\,')\, G(\vec r - \vec r\,')\, d^3 r'$$

$$= \int \rho(\vec r\,')\, \underbrace{\Delta_{\vec r}\, G(\vec r - \vec r\,')}_{= -\delta(\vec r - \vec r\,')}\, d^3 r'$$

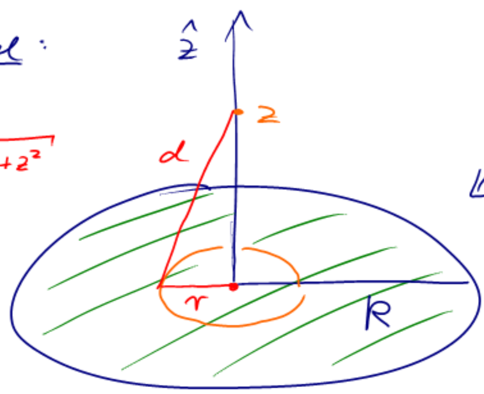
$\Delta_{\vec r}$ linear

$$= -\rho(\vec r) \int \delta(\vec r - \vec r\,')\, d^3 r' = -\rho(\vec r) \quad \checkmark$$

Eigenschaften (i) und (ii) von $\delta(\vec r)$

Beispiel:

$d = \sqrt{r^2 + z^2}$



homogen geladene Kreisscheibe, Radius R, Flächenladungsdichte σ

$$\boxed{\vec E\text{-Feld auf } \hat z\text{-Achse?}}$$

aufgrund Symmetrie $\vec E(0,0,z) \equiv E_z(z)\,\hat z$; wobei

$$E_z(z) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}(0,0,z) \; ;$$

nach (1): $$\phi(z) \equiv \phi(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^R dr\, \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2} \sqrt{r^2 + z^2}\,\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{E_z(z) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \operatorname{sgn} z\right)}$$

<u>für $R \to \infty$:</u>

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn} z \qquad \checkmark \quad (\text{Exp. II})$$

<u>für $R \ll z$:</u>

Taylor

für $z > 0$: $\quad \operatorname{sgn} z = 1$ und $\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}} \approx 1 - \dfrac{R^2}{2z^2}$

$$\rightarrow \quad E_z(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi R^2}{z^2} = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2} \qquad \checkmark$$

$Q_R = \pi R^2 \cdot \sigma$