δ - Distribution / δ - Funktion

bisherige physikalische Definition der 3-dim δ-Funktion $\delta(\vec{r})$:

$\delta(\vec{r}) \equiv$ Ladungsdichte der Einheitspunktladung in $\vec{0}$

$\rightarrow$ (i) $\delta(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$

(ii) $\int_V \delta(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 1$ sofern $\vec{0} \in V$

Präzisierung dieser Definition (zuerst in einer Dimension: $\delta(x)$) zeigt, dass $\delta(x)$ keine Funktion im üblichen Sinne ist.

Trotzdem bleiben wir beim Begriff "δ-Funktion" und verwenden entsprechende Notation $\delta(x)$, $\delta(x-x_0)$, $\delta(g(x))$, ...

Falls nötig erinnern wir uns aber daran, dass es sich mathematisch gesehen bei $\delta(x)$ um eine Distribution handelt (s.u.)

Eindimensionale δ-Funktion $\delta(x)$, definiert durch:

(i) $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$

(ii) $\int_a^b \delta(x)\, dx = 1$ sofern $a < 0 < b$

(iii) $\delta(x)$ beliebig oft diff.bar

alternativ (und möglicherweise anschaulicher):

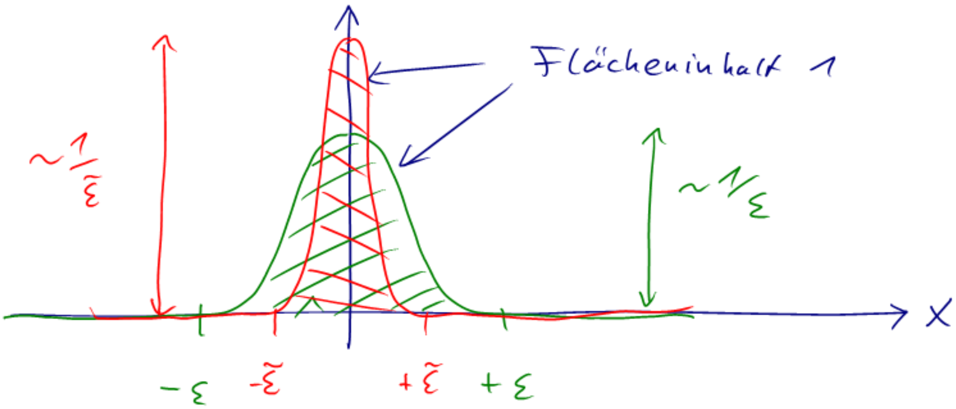
$\delta(x)$ ist "Grenzfunktion" der ε-regularisierten δ-Funktionen

für $\varepsilon > 0$ (und i.d.R. $\varepsilon \ll 1$) ist $\boxed{\delta_\varepsilon(x)}$ eine $\longrightarrow$

beliebig oft diff.bare Funktion $\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

(i') $\delta_\varepsilon(x) \begin{cases} = 0 & : |x| \geq \varepsilon \\ > 0 & : |x| < \varepsilon \end{cases}$

(ii') $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1$



<u>Beispiel</u>:

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & : |x| \geq \varepsilon \\ c_\varepsilon \, e^{-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}} & : |x| < \varepsilon \end{cases}$$

mit Normierungskonstante $c_\varepsilon := \varepsilon \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-u^2}}\, du$

aus (i), (ii) bzw. (i'), (ii') und $\varepsilon \to 0$ folgen allg.

<u>Eigenschaften ("Rechenregeln") der δ-Funktion:</u>

- $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\delta(x)\, dx = f(0)}$ (sofern f stetig in 0 und $a < 0 < b$)

[denn für $\varepsilon \to 0+$ ist aufgrund Stetigkeit von f in 0

$$\int_a^b f(x)\,\delta_\varepsilon(x)\,dx \overset{(i')}{=} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\delta_\varepsilon(x)\,dx = f(0) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx}_{\overset{(ii')}{=}1} = f(0).$$]

- $$\boxed{\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)}$$ (sofern f stetig in x_0, $a < x_0 < b$)

- $$\boxed{\int_a^b f(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x)\,dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)}$$ (sofern f stetig diff.bar in 0, $a < 0 < b$)

[denn für $\varepsilon \to 0+$ ist

$$\int_a^b f(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\delta_\varepsilon(x)\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{f(x)\,\delta_\varepsilon(x)\Big|_a^b}_{\overset{(i')}{=}0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x)\,\delta_\varepsilon(x)\,dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)$$]

allgemeiner:

- $$\boxed{\int_a^b f(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x_0)\,dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$$

wiederholtes Anwenden zeigt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\frac{\partial^k}{\partial x^k}\delta(x-x_0)\,dx = (-1)^k\,\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0)}$$

- Substitutionsregel: sei $g: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ invertierbare Funktion mit genau einer einfachen Nullstelle bei $x_0 \in]\alpha, \beta[$; dann

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\, \delta(g(x))\, dx = f(x_0) \cdot \frac{1}{|g'(x_0)|}}$$

[denn unter Annahme, dass g monoton steigend (fallend):

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, \delta(g(x)) \underset{x = g^{-1}(u)}{=} (-)\int_a^b f(g^{-1}(u))\, \delta(u) \cdot \underbrace{(g^{-1})'(u)}_{= \frac{1}{g'(g^{-1}(u))}}\, du$$

$$= \int_a^b \frac{f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|} \cdot \delta(u)\, du \underset{g^{-1}(0) = x_0}{=} \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$]

- $$\boxed{\delta(x) = \delta(-x)}$$

[Folgt z.B. aus $\delta_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \delta(x)$ und der Tatsache, dass mit $\delta_\varepsilon(x)$ auch $\delta_\varepsilon(-x)$ ε-reg. δ-Fkt. ist.]

Verallgemeinerung zur n-dim. δ-Funktion $\delta(\vec{x})$, wobei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\delta(\vec{x}) := \delta(x_1)\, \delta(x_2) \cdots \delta(x_n)}$$

mit Eigenschaften entsprechend denen von $\delta(x)$; etwa:

- $$\int_V f(\vec{x})\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d^n\vec{x} = f(\vec{x}_0)$$

  (sofern $\vec{x}_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$)

- $$\int_V f(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d^n\vec{x} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$$

- $$\int_V f(\vec{x})\,\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d^n\vec{x} = (-1)^k\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}$$

insbesondere für $n=3$: $\vec{x} \equiv \vec{r}$:

- $$\int_V f(\vec{r})\,\operatorname{grad}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,d^3\vec{r} = -\operatorname{grad} f(\vec{r}_0)$$

- $$\delta(\overbrace{|\vec{r}|}^{\in\,\mathbb{R}^1}) = \delta\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$ 1D-δ-Fkt.!

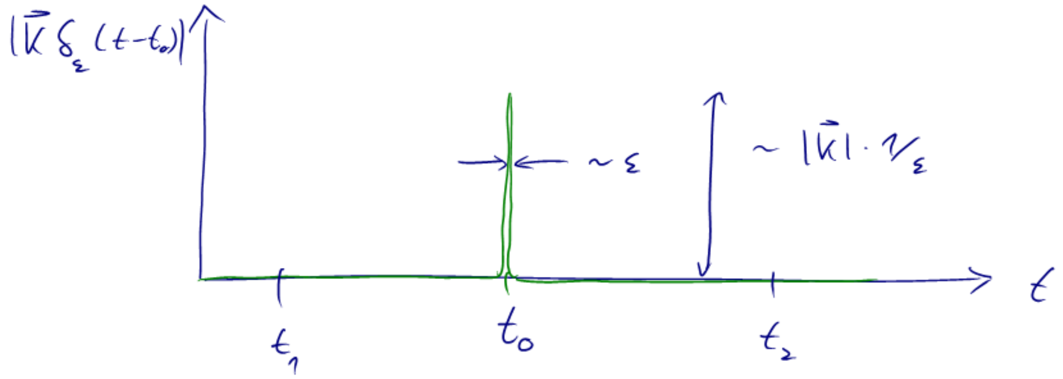
- $$\delta(\underbrace{\vec{r}}_{\in\,\mathbb{R}^3}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$ 3D-δ Fkt!

Anwendungsbeispiele:

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\frac{\sin hx}{\sqrt{1+\cos^2 hx}}\,\delta(x-x_0)\,dx = \frac{e^{-x_0^2}\,\sin hx_0}{\sqrt{1+\cos^2 hx_0}}$$

2) Kraftstoß der Stärke $\vec{K}$ zur Zeit t_0:

beschrieben durch zeitabhängige Kraft $\boxed{\vec{F}(t) = \vec{K}\,\delta(t-t_0)}$

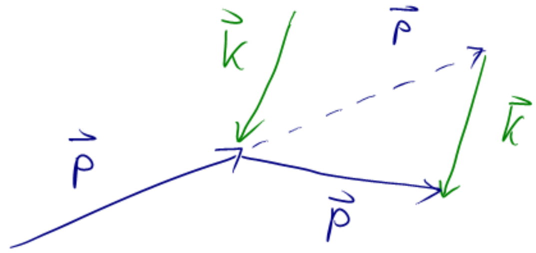


z.B. Kraftstoß auf freies Teilchen mit Impuls $\vec{p}(t_1) \equiv \vec{p}$;

$\vec{p}(t_2) \equiv \vec{p}\,' = ?$

Newton: $$\dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}(t) \xrightarrow{\int_{t_1}^{t_2} dt} \vec{p}\,' - \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{K}\,\delta(t-t_0)\,dt = \underline{\underline{\vec{K}}}$$



3) $\rho(x,y,z) = \sigma_0 \, \delta(z)$ beschreibt Ladungsdichte einer mit Flächenladungsdichte σ_0 homogen geladenen, unendlich ausgedehnten Platte in xy-Ebene bei $z=0$.