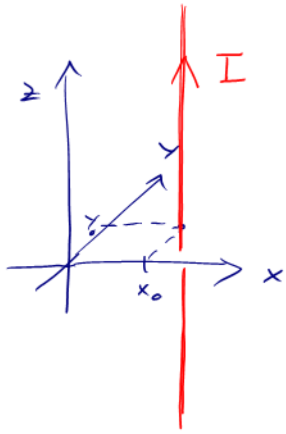
Anwendungsbeispiele (Fortsetzung):

4) Stromdichte eines unendlich langen, geraden Leiters $\parallel \hat{z}$ durch Punkt $(x_0, y_0, 0)$, Strom I:

$$\vec{j}(\vec{r}) = I\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\hat{z}$$

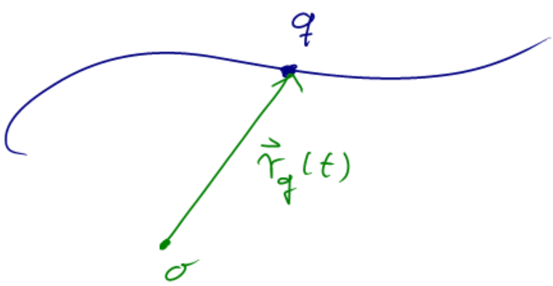


Test: Strom durch Fläche $F = [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-a, y_0+a] \times \{0\}$:

$$I_F \equiv \int_F \vec{j}\, \underbrace{d\vec{f}}_{dx\,dy\,\hat{z}} = \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\; I\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

$$= I \underbrace{\int_{x_0-a}^{x_0+a} dx\,\delta(x-x_0)}_{=1} \underbrace{\int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\,\delta(y-y_0)}_{=1} = I \quad \checkmark$$

5) Ladungs- und Stromdichte eines mit q geladenen Teilchens auf Bahn $t \mapsto \vec{r}_q(t)$:



$$\rho(\vec{r}, t) \overset{!}{=} q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \overset{!}{=} \dot{\vec{r}}_q(t)\,\rho(\vec{r}, t)$$

$$= \dot{\vec{r}}_q(t)\, q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$$

Test: Kontinuitätsgleichung ($\widehat{=}$ Ladungserhaltung) erfüllt?

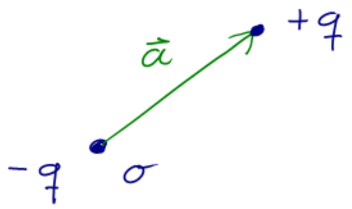
- $\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -q \left\langle \operatorname{grad} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)),\, \dot{\vec{r}}_q(t) \right\rangle$ (verallg. Kettenregel)

- $\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\left(q\, \dot{\vec{r}}_q(t)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_q(t))\right)$

$$= q \langle \dot{\vec{r}}_q(t),\ \operatorname{grad} \delta(\vec{r}-\vec{r}_q(t)) \rangle$$

also $\quad \dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \checkmark$ $\qquad \lrcorner$

6) Ladungsdichte eines elektr. Dipols im $\vec{0}$, Dipolmoment $\vec{d}$:



mit $\quad |\vec{a}| \longrightarrow 0$

$\qquad q \longrightarrow \infty$

so, dass $\quad \boxed{q\,\vec{a} = \vec{d}}$

$$\rho_{\vec{d}}(\vec{r}) \overset{!}{=} q\, \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{a})}_{|\vec{a}|\to 0} - q\,\delta(\vec{r})$$

$$= q \left\{ \cancel{\delta(\vec{r})} - \langle \operatorname{grad} \delta(\vec{r}), \vec{a} \rangle - \cancel{\delta(\vec{r})} \right\}$$

d.h. $\quad \boxed{\rho_{\vec{d}}(\vec{r}) = -\langle \vec{d}, \operatorname{grad} \delta(\vec{r}) \rangle}$

$$\left(\equiv - \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) \equiv - \sum_{i=1}^{3} d_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\vec{r}) \right)$$

7) Potential eines elektr. Dipols im $\vec{0}$ mit Dipolmoment $\vec{d}$:

mittels allg. Formel

$$\phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}\, d^3\vec{r}$$

erhalten wir für $\rho(\vec{r}) \equiv \rho_{\vec{d}}(\vec{r}) \overset{6)}{=} -\langle \vec{d}, \operatorname{grad} \delta(\vec{r}) \rangle$:

$$\phi(\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \langle \vec{d}, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{grad} \delta(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} d^3\vec{r} \rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \langle \vec{d}, \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\Big|_{\vec{r}=0} \rangle$$

siehe Vrlsg 5)

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \langle \vec{d}, -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \rangle_{\vec{r}=0} = \frac{\langle \vec{d}, \vec{r}_0 \rangle}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}$$

$$\operatorname{grad} f(|\vec{r}-\vec{r}_0|) = f'(|\vec{r}-\vec{r}_0|) \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

d.h. $$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{\langle \vec{d}, \hat{r} \rangle}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}}$$

8) Beweis der Potenzialformel

$$\phi(\vec{r}) \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') \, G(\vec{r}-\vec{r}') \, d^3\vec{r}' \qquad (1)$$

- Greensche Fkt. $G(\vec{r})$ erfüllt (als Potenzial der Einheitspktldg in $\vec{0}$) die Poisson-Gl

$$\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \qquad (\varepsilon_0 = 1)$$

also auch $$\Delta G(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \; ; \qquad (2)$$

zu zeigen: $$\Delta \phi(\vec{r}) \overset{!}{=} -\rho(\vec{r})$$ (wobei $\phi(\vec{r})$ nach Gl. (1))

$\longrightarrow$

$$\Delta \phi(\vec{r}) \overset{(1)}{=} \Delta \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(\vec{r}\,') \, G(\vec{r}-\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(\vec{r}\,') \, \Delta G(\vec{r}-\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,'$$

$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ linear

$$\underset{(2)}{=} - \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,'$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}) \, d^3\vec{r}\,' = -\varrho(\vec{r}) \quad \checkmark$$

wegen $G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \longrightarrow 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$

erfüllt $\phi(\vec{r})$ nach Gl. (1) auch Standardrandbedingung.

Wir schließen mit einer kurzen Erläuterung des Begriffs Distribution in der Mathematik:

$$\boxed{\text{Distribution } D \text{ (in } \mathbb{R}) := \text{lineare Abb. } D: \mathcal{T} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto D[f]}$$

hierbei ist $\mathcal{T}$ der Raum der sog. Testfunktionen auf $\mathbb{R}$:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Testfunktion g.d.w. f bel. oft diff.bar ist und zudem nur auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ verschieden von 0 ist

Beispiele

1) für jede (hinreichend glatte) Fkt $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die <u>reguläre Distribution</u> R_u erklärt durch

$$R_u[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, u(x)\, dx$$

$\ulcorner$ R_u Distribution, da für $f, g \in \mathcal{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u(x)\, dx \in \mathbb{R}$

2) $$R_u[f+g] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)+g(x))\, u(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, u(x)\, dx$$
$$= R_u[f] + R_u[g],$$

3) $$R_u[\lambda f] = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda f(x))\, u(x)\, dx$$
$$= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u(x)\, dx = \lambda R_u[f]$$ $\lrcorner$

<u>Bem.</u>: eine Distribution, die nicht mittels einer geeigneten Fkt. u als reguläre Distribution R_u geschrieben werden kann, heißt <u>singulär</u>.

2) <u>δ-Distribution an der Stelle x_0</u>: $\delta_{x_0} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$

erklärt durch $$\boxed{\delta_{x_0}[f] := f(x_0)}$$

δ_{x_0} ist singuläre Distribution und tatsächlich Grenzdistribution der regulären Distributionen $\delta_{x_0,\varepsilon}$, erklärt für $\varepsilon > 0$ durch

$$\delta_{x_0,\varepsilon}[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta_\varepsilon(x-x_0)\, dx$$

regularisierte δ_ε Fkt. aus Vrlsg. 5

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{x_0,\varepsilon} \overset{!}{=} \delta_{x_0}}$$

⌈ denn

$$\delta_{x_0,\varepsilon}[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta_\varepsilon(x-x_0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x_0) \equiv \delta_{x_0}[f]$$ ⌋

Die Ableitung einer allg. Distribution D ist erklärt durch

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} D[f] := -D\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}$$

⌈ denn das läuft im Falle einer regulären Distribution R_u genau auf Ableitung der Funktion u hinaus:

$$\frac{\partial}{\partial x} R_u[f] \overset{\text{Def.}}{=} -R_u\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, u(x)\, dx$$

$$\underset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{-f(x)\,u(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\text{, da } f \text{ Testfkt.}} + \int f(x)\, \frac{\partial u}{\partial x}(x)\, dx = R_{\frac{\partial u}{\partial x}}[f] .$$ ⌋