Greensche Funktionen (Fortsetzung)

bisher: Greensche Fkt. $G(\vec{r}) \equiv$ Potenzial der Einheitspktldg. in 0 mit Standardrandbedingung;

d.h. $G(\vec{r})$ genügt $\Delta G(\vec{r}) \overset{!}{=} -\delta(\vec{r})$

und $G(\vec{r}) \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$.

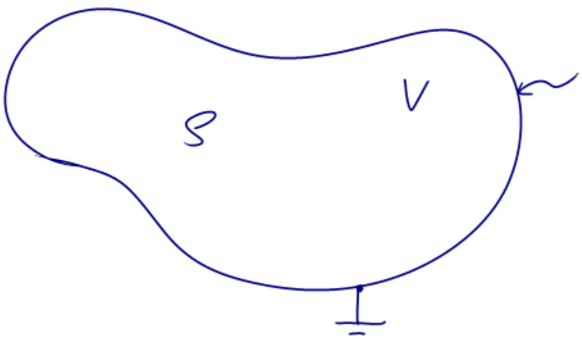
$\rightarrow$ Bestimmung des Potenzials $\phi(\vec{r})$ mit Standardrandbedg. für allg. Ldgsdichte $\rho(\vec{r})$ gemäß

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}\,')\, G(\vec{r} - \vec{r}\,')\, d^3 r'$$

("Faltung von ρ mit G", vgl. Übung)

d.h. $\phi(\vec{r})$ genügt $\Delta \phi(\vec{r}) \overset{!}{=} -\rho(\vec{r})$, $\phi(\vec{r}) \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$

nun: allgemeineres Problem: für gegebenes Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ und Ladungsdichte ρ auf V bestimme Potenzial ϕ auf V mit Randbedingung $\phi|\partial V \overset{!}{=} 0$.



∂V, "geerdet", d.h. auf Nullpotenzial

gesuchtes Potenzial $\phi(\vec{r})$ genügt Poisson-Gl. $\boxed{\Delta \phi = -\rho}$ (1)

auf V mit Randbedingung $\boxed{\phi(\vec{r}) = 0 \text{ für alle } \vec{r} \in \partial V}$

benötigen dazu:

verallgemeinerte $\boxed{\text{Greensche Funktion} \quad G: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{r}, \vec{r}\,') \longmapsto G(\vec{r}, \vec{r}\,')}$

definiert durch:

- $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ ist Potenzial $\phi_{\vec{r}\,'}(\vec{r})$ der Einheitspkt.ldg. am Ort $\vec{r}\,' \in V$ mit Randbedingung $\phi_{\vec{r}\,'}(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in V$. (physikalische Def.)

d.h.: für <u>alle</u> $\vec{r}\,' \in V$ genügt $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ (als Fkt. von $\vec{r} \in V$)

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & \Delta_{\vec{r}}\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \\ (ii) & G(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0 \quad \text{für alle } \vec{r} \in \partial V \end{array}}$$

(mathematische Def.)

mittels der so def. Greenschen Fkt. $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für $V \subset \mathbb{R}^3$ erhalten wir gesuchtes Potenzial ϕ zu ρ gemäß

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,')\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, d^3\vec{r}} \qquad (2)$$

(d.h. wie zuvor ist ϕ wieder Linearkombination / Superposition der Einheitspktladgspotenziale $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$)

Dass $\phi(\vec{r})$ gemäß (2) tatsächlich Problem (1) löst sehen wir wie zuvor:

$$\Delta \phi(\vec{r}) \overset{(2)}{=} \Delta_{\vec{r}} \int_V \rho(\vec{r}\,')\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' \overset{\Delta_{\vec{r}} \text{ linear}}{=} \int_V \rho(\vec{r}\,')\, \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'$$

$$\overset{(i)}{=} -\int_V \rho(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' = -\rho(\vec{r}) \; ; \quad ✓$$

zudem gilt für $\vec{r} \in \partial V$:

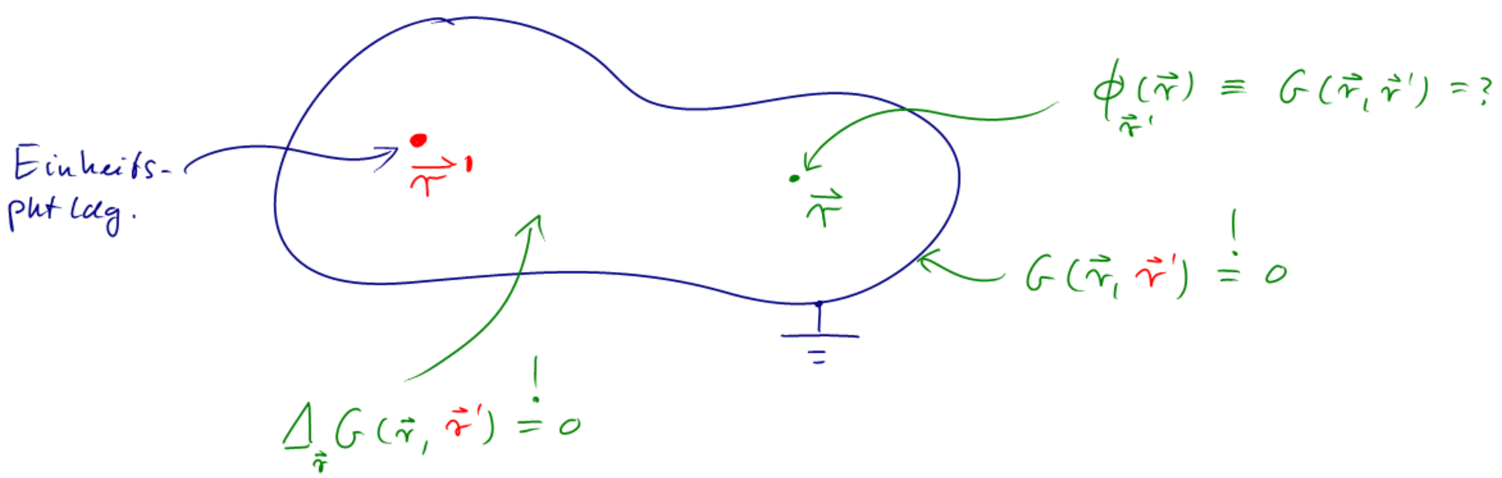
$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,') \, G(\vec{r},\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' \overset{(ii)}{=} 0 \, . \quad ✓$$

Bemerkungen:

- Existenz und Eindeutigkeit von $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ überlassen wir wie immer der Mathematik
- für $V \equiv \mathbb{R}^3$ erhalten wir $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ offenbar aus früherer Greensche Fkt. $\tilde{G}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|}$ durch

$$\boxed{G(\vec{r},\vec{r}\,') \overset{!}{=} \tilde{G}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \left(= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

<u>verbleibendes Problem</u>: $\boxed{\text{wie bestimmt man } G(\vec{r},\vec{r}\,') \text{ für gegebenes Gebiet } V \subset \mathbb{R}^3 \text{ ?}}$



Für hinreichend "einfaches" Gebiet V hilft

Bildladungsmethode

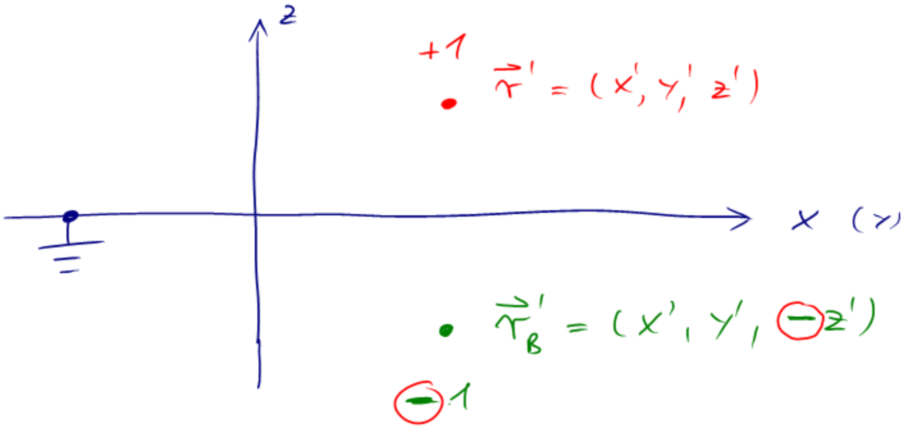
Idee: für Einheitspkt.ldg bei $\vec{r}\,'$ innerhalb von V ($\to \phi_1$) positioniere geeignete "Bildladung(en)" außerhalb von V ($\to \phi_{Bild}$) derart, dass auf ∂V $\phi_{ges} = \phi_1 + \phi_{Bild} \overset{!}{=} 0$.

beachte: Für $\vec{r} \in V$: $\Delta \phi_{Bild}(\vec{r}) = -\rho_{Bild}(\vec{r}) \overset{!}{=} 0$

$$\to \Delta \phi_{ges}(\vec{r}) = \Delta \phi_1(\vec{r}) \overset{!}{=} -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') .$$

einfaches Beispiel:

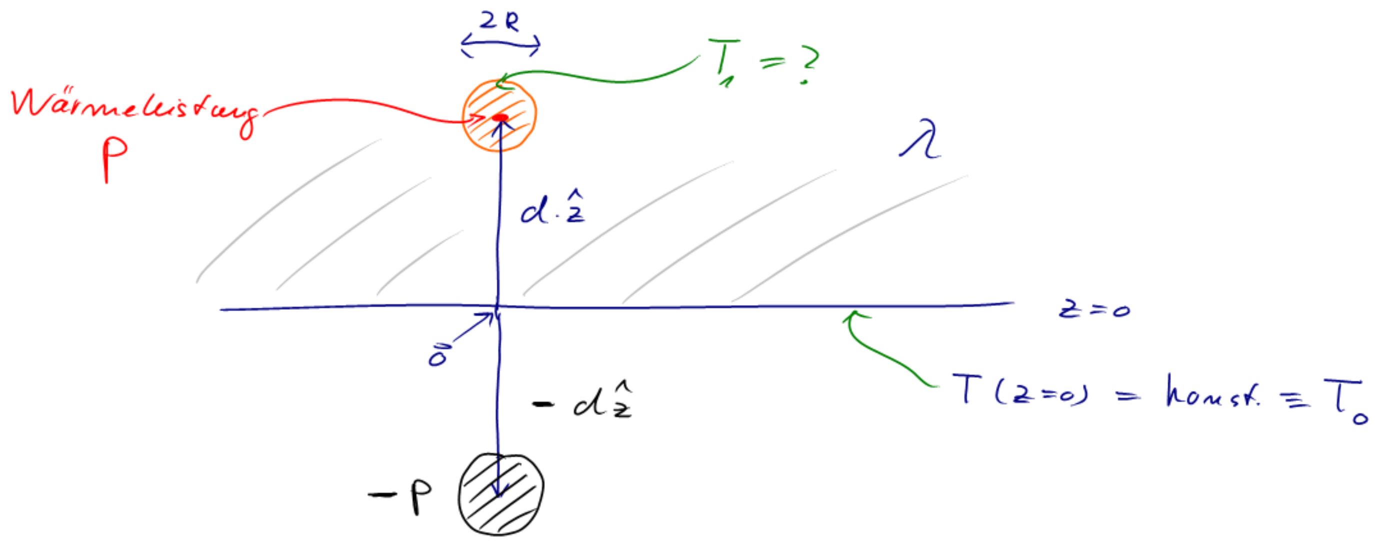
$$V = \text{Halbraum } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \}$$



$$\left[\ \vec{r}_B\,' = \vec{r}\,' - 2\langle \hat{z}, \vec{r}\,' \rangle \hat{z}\ \right]$$

$$\to \boxed{G(\vec{r},\vec{r}\,') \overset{!}{=} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_B\,'|} \right)} \qquad (*)$$

Anwendung: stat. Wärmeleitung: $\Delta T = -\kappa/\lambda$



für $\vec{r} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \setminus K_R(d\cdot\hat{z})$ wegen (*) (und bekannten Ergebnisse für Kugelsymm. Lsgen der Poisson-Gl.):

$$\boxed{T(\vec{r}) = \frac{P}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{|\vec{r}-d\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r}+d\hat{z}|}\right)} + T_0$$

$$\longrightarrow \quad T_1 \equiv T\left((d+R)\hat{z}\right) = \frac{P}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2d+R}\right) + T_0$$

z.B. $\lambda = \lambda_{Styropor} \approx 0.04\ W/mK$

$P = P_{LED} \simeq 1\ W$

$R = 0.01\ m, \quad d = 0.03\ m$

$$\rightarrow \quad T_1 - T_0 = \frac{1\ W\ mK}{4\pi\ 0.04\ W}\left(\frac{1}{0.01\ m} - \frac{1}{0.061\ m}\right) = 166\ K$$