Fouriertransformation

Hintergrund: reelle / komplexe / vektorwertige Funktionen können bekanntlich addiert und skalarmultipliziert werden und bilden damit (unter gewissen Einschränkungen) einen Vektorraum.

$\longrightarrow$ Basis $\{b_i\}$ eines gewöhnlichen VRs entspricht vollständigem Funktionensystem $\{\varphi_\lambda(x)\}$ eines Funktionenraums

Beispiele:

i-te Stelle

1) $\mathbb{R}^n$, Standardbasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$, $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$

$\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \ni \boxed{\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i}$

2) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ analytisch} \}$

vollst. Funktionensystem: $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\varphi_n(x) := x^n$

$$V \ni \boxed{f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x)} \left(\equiv \sum_n a_n x^n \right)$$

3) $W = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ Testfunktion} \}$

vollst. Fktensystem: $\{\varphi_{x_0}\}_{x_0 \in \mathbb{R}}$

mit $\varphi_{x_0}(x) := \delta(x - x_0)$, denn

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \, f(x_0) \, \delta(x - x_0),$$

also $$\boxed{f(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_0}_{\text{„Summation über } x_0\text{"}}\; \underbrace{f(x_0)}_{\text{"}\varphi_{x_0}\text{-Komponente von } f\text{"}}\; \underbrace{\varphi_{x_0}(x)}_{\text{„Basis"-Funktion } \varphi_{x_0}}} \qquad (1)$$

„Basis"-Funktion φ_{x_0}

"φ_{x_0}-Komponente von f"

„Summation über x_0"

<u>beachte</u>: kontinuierlicher Index $x_0 \in \mathbb{R}$ erfordert <u>Integration</u> statt <u>Summation</u>!

alternatives vollst. Funktionensystem für W:

<u>„ebene Wellen"</u>: $\{ \chi_k \}_{k \in \mathbb{R}}$, $\boxed{\chi_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ikx}}$

(Konvention!)

beachte:
- $\mathrm{Re}\, \chi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \cos kx$,
- $\mathrm{Im}\, \chi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \sin kx$
- $|\chi_k(x)| = \frac{1}{2\pi}$ (konstant!)

(Fkten $\chi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{2\pi}$ und $\varphi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ haben also <u>konträre</u> Eigenschaften ...)

$\rightsquigarrow$ <u>zu (1) alternative Darstellung von f:</u>

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \hat{f}(k)\ \frac{e^{ikx}}{2\pi}} \qquad (2)$$

„Summation über k"

"χ_k - Komponente von f"

"Basis" - Fkt. $\chi_k(x)$

(2) ist die Fourier-Darstellung von f,

der "Basis-Wechsel" von $f(x_0) \longrightarrow \hat{f}(k)$

ist genau die Fouriertransformation von f

$\boxed{\text{Wie bestimmen wir } \hat{f}(k) \text{ anhand } f(x_0)\text{ ?}}$

Wie immer:

mittels Darstellung der „alten" Basis-Fkten $\varphi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ durch die "neuen" Basis-Fkten $\chi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{2\pi}$.

Erinnerung:

$\{\vec{e}_i\}$, $\{\vec{g}_j\}$ seien Basen des $\mathbb{R}^n$;

gelte $\underbrace{\vec{e}_i = \sum_j \alpha_{ij}\vec{g}_j}$, dann etwa

$$\vec{v} \overset{!}{=} \sum_i v_i \vec{e}_i \overset{\downarrow}{=} \underbrace{\sum_{ij} v_i \alpha_{ij} \vec{g}_j}_{\displaystyle \overset{\shortparallel}{\sum_j \left(\sum_i v_i \alpha_{ij}\right)\vec{g}_j}} \overset{!}{=} \sum_j u_j \vec{g}_j$$

$$\longrightarrow \boxed{u_j = \alpha_{ij} v_i}$$

im folgenden hilfreich:

für $a > 0$, $b \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2 + bu}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{b^2/4a}} \qquad (*)$$

denn

$$\text{l.s.} \overset{u = v/\sqrt{a}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 + \frac{b}{\sqrt{a}} v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(v - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}}\, dv$$

$$\underset{v = x + b/2\sqrt{a}}{=} \frac{e^{b^2/4a}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{b^2/4a} .$$

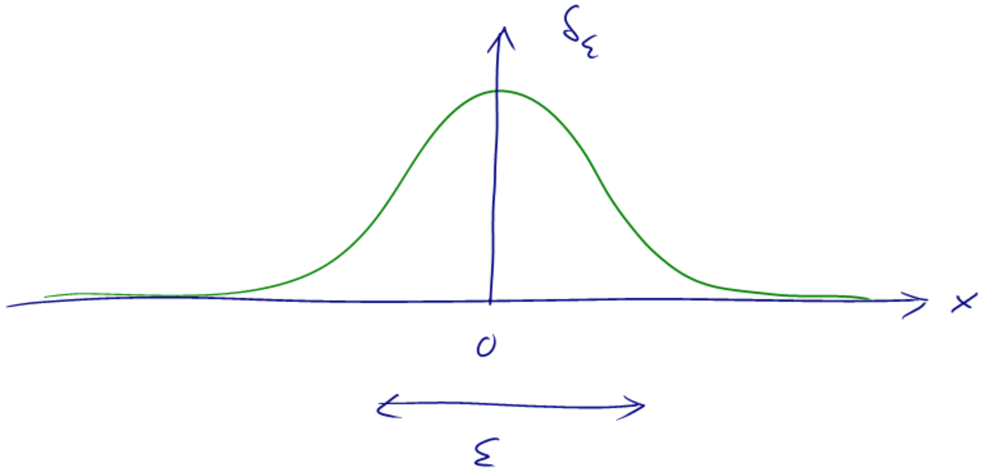
hiermit zeigen wir:

$$\delta_\varepsilon(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, e^{-\frac{\varepsilon^2 k^2}{2}}$$ ist eine

ε-regularisierte δ-Funktion!

denn mit (*) offenbar $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\, e^{-x^2/2\varepsilon^2} =$

(normierte) Gaußsche Glockenkurve der Breite ε:



wegen $\delta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \delta$ erhalten wir $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}$ (3)

und daraus die Darstellung von $\varphi_{x_0}(x) = \delta(x-x_0)$ durch

$\chi_k(x) = e^{ikx}/2\pi$:

$$\varphi_{x_0}(x) = \delta(x-x_0) \overset{(3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-x_0)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx_0}\, \chi_k(x)$$

Einsetzen in $f(x) = \int dx_0\, f(x_0)\, \varphi_{x_0}(x)$ ergibt:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, e^{-ikx_0}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \left(\underline{\int dx_0\, f(x_0)\, e^{-ikx_0}} \right) e^{ikx}$$

Vergleich mit $f(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \underline{\hat{f}(k)}\, e^{ikx}$ zeigt:

$$\boxed{\underline{\hat{f}(k)} \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, \underline{f(x_0)}\, e^{-ikx_0}}$$

Transformation der Komponenten $f(x_0)$ der Fkt. f bzgl. $\{\varphi_{x_0}\}_{x_0 \in \mathbb{R}}$
in die Komponenten $\hat{f}(k)$ der Fkt. f bzgl. $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{R}}$

$\equiv$ Fouriertransformation von $f(x)$ nach $\hat{f}(k)$

$\longrightarrow$ Definition und Satz

Def.: Die Fouriertransformierte der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ ist die Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k \mapsto \hat{f}(k)$ definiert durch

$$\boxed{\hat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-ikx} \, f(x)}$$

Satz: es gilt

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \hat{f}(k) \, e^{ikx}}$$

inverse Fouriertransformation von $\hat{f}$ nach f

beachte: F.T. und inverse F.T. bis auf Faktor 2π und Vorzeichen im e^{-ikx} bzw. e^{ikx} identisch!

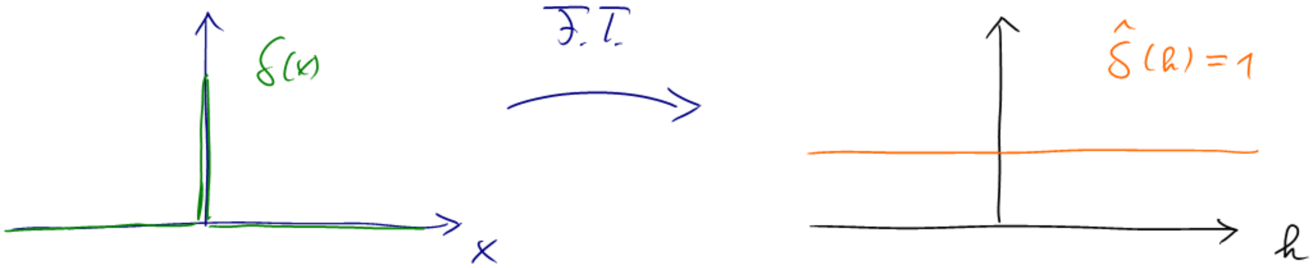
Beispiele:

1) F.T. von $\delta(x)$: $\hat{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-ikx} \, \delta(x) = 1$

$$\boxed{\hat{\delta}(k) = 1}$$

was wir auch schon vorher wussten:

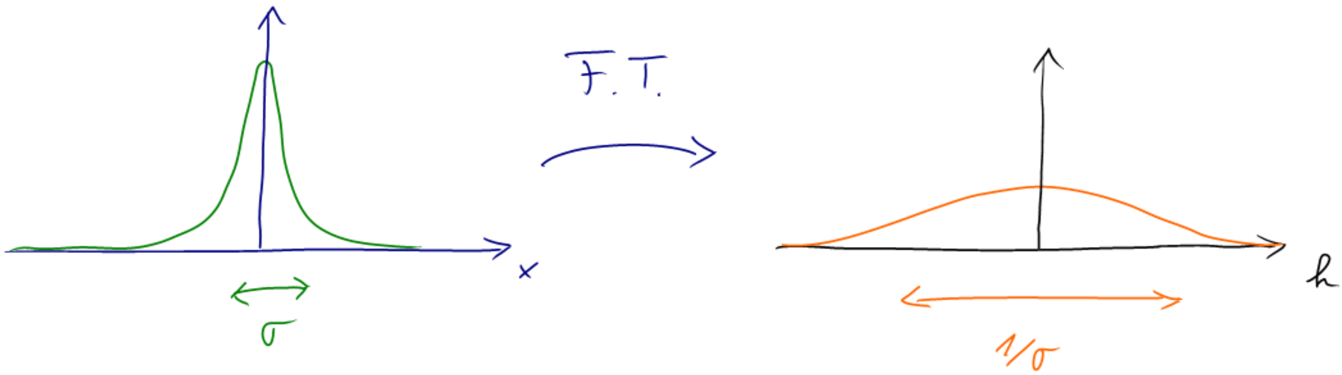
$$\int \frac{dk}{2\pi} \, 1 \, e^{ikx} \overset{!}{=} \delta(x) \overset{!}{=} \int \frac{dk}{2\pi} \, \hat{\delta}(k) \, e^{ikx} \longrightarrow \hat{\delta}(k) = 1 \; !$$



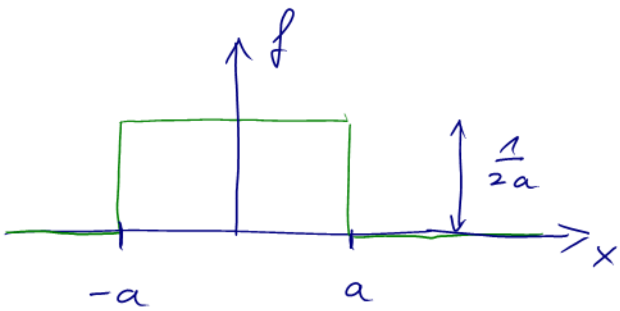
2) F.T. der Gaußschen Glockenkurve $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$:

$$\longrightarrow \boxed{\hat{f}_\sigma(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\, f_{\frac{1}{\sigma}}(k)}$$

vgl. Übung.



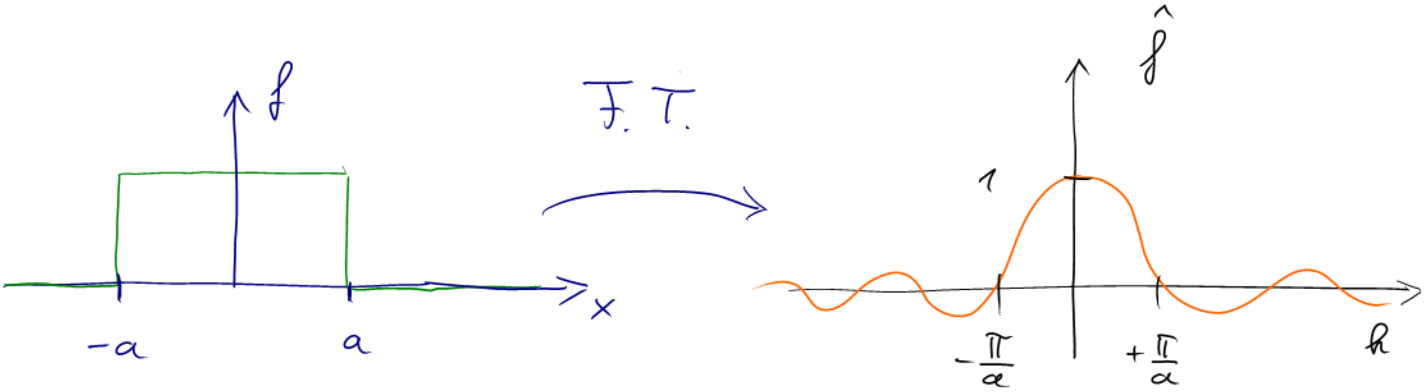
3) F.T. der (normierten) Kastenfunktion der Breite 2a:



$$f(x) := \begin{cases} 0 & : |x| \geq a \\ \frac{1}{2a} & : |x| < a \end{cases}$$

$$\longrightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} dx\; e^{-ikx} = \frac{1}{2a} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-a}^{a} = \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2iak}$$

$$= \frac{\sin ka}{ka}$$



d.h. $$f(x) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \frac{\sin ka}{ka} \, e^{ikx} \overset{!}{=} \begin{cases} 0 : & |x| \geq a \\ \frac{1}{2a} : & |x| < a \end{cases}$$

kann mittels Residuensatz auch direkt berechnet werden → Funktionenth.

Allg. Eigenschaften der Fouriertransformation

(i) F.T. ist linear (wie jeder Basiswechsel ...)

d.h.
$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g} \, ,$$
$$\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f} \, .$$

(ii) Translation um x_0 → Multiplikation mit e^{-ikx_0}

sei $f_{x_0}(x) := f(x - x_0)$, dann

$$\boxed{\hat{f}_{x_0}(k) = e^{-ikx_0} \cdot \hat{f}(k)}$$

(iii) Ableitung nach x $\longrightarrow$ Multiplikation mit ik

$$\boxed{\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(k) = ik\,\hat{f}(k)}$$

(iv) Faltung von f mit g $\longrightarrow$ Multiplikation von $\hat{f}$ und $\hat{g}$

$$\boxed{\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}}$$

(i) Folgt aus Linearität des Integrals.

zu (ii)

$$f_{x_0}(x) \equiv f(x-x_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,\hat{f}(k)\,e^{ik(x-x_0)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,\underbrace{e^{-ikx_0}\hat{f}(k)}_{\overset{!}{=}\ \hat{f}_{x_0}(k)}\,e^{ikx}$$

zu (iii):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,\hat{f}(k)\,e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,\underbrace{ik\,\hat{f}(k)}_{\overset{!}{=}\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(k)}\,e^{ikx}$$

zu (iv): vgl. Übung.