

4. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2015/16

Internetseite: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs2015.html/>

17. Dreiecksungleichungen

Beweisen Sie mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgende sogenannte *Dreiecksungleichungen* für euklidische Vektoren \underline{a} , \underline{b} :

$$||\underline{a}| - |\underline{b}|| \leq |\underline{a} \pm \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|.$$

Warum heißen diese Ungleichungen Dreiecksungleichungen?

18. Vektorprodukt

a) Gegeben seien die Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis B . Bestimmen Sie $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{a}$, $\langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b} \rangle$ sowie $(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b})$. Wie groß ist die Fläche eines von \underline{a} und \underline{b} aufgespannten Parallelogramms?

b) Zwei Vektoren der Längen 2 und 3 schließen den Winkel $\pi/6$ ein. Wie lang ist ihr Vektorprodukt?

19. Tetraeder

Zeigen Sie, dass das Volumen eines von den Vektoren \underline{u} , \underline{v} und \underline{w} aufgespannten Tetraeders

$$V = \frac{1}{6} | \langle \underline{u} \times \underline{v}, \underline{w} \rangle |$$

beträgt. Benutzen Sie hierzu, dass hier $V = \frac{1}{3}$ Grundfläche \cdot Höhe gilt.

20. Euklidische Punktraum

Im welchen Sinne ist der dreidimensionale euklidische Punktraum E_3 der ‘‘Schwager’’ des euklidischen Vektorraums V_3 der dreidimensionalen Translationen?

21. Abstand zweier Geraden

Gegeben seien zwei Geraden G_1 und G_2 im E_3 . Die erste Gerade enthalte den Punkt $O + \underline{r}_1$ und sei parallel zu \underline{a}_1 , die zweite enthalte den Punkt $O + \underline{r}_2$ und sei parallel zu \underline{a}_2 . Die Vektoren \underline{a}_1 und \underline{a}_2 seien nicht parallel. Zeigen Sie, dass dann der Abstand der Geraden durch

$$\frac{| \langle \underline{r}_1 - \underline{r}_2, \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 \rangle |}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|} \tag{1}$$

gegeben ist. Wie bestimmt sich der Abstand falls die Geraden parallel sind?

22. Schnittgerade zweier Ebenen

Zwei Ebenen enthalten jeweils den Punkt O und sind normal zu \underline{n}_1 bzw. \underline{n}_2 . Wie lautet die Schnittgerade dieser Ebenen?